

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |2x - 3|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$ 의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$ 는 함수 f 의 치역)

① 1

② 2

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$ 에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore 2 \notin f(X)$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$
 $(3, 2, 1)$ 이므로
 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

3. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

4. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x - 1)(x + 2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

5. 다음 중 역함수가 존재하지 않는 것은?

① $y = x - 2$

② $y = x^2$

③ $y = x^3$

④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$)

⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$)

해설

일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

6. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

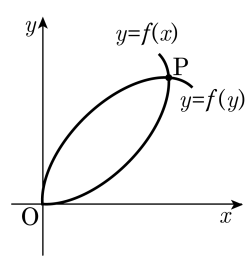
해설

$$y = 2x - 2, x = \frac{1}{2}y + 1 \quad x, y \text{ 를 바꿔주면}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

7. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

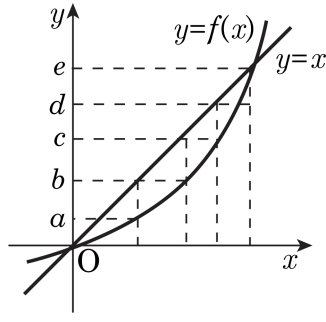
- ① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
③ $(1, 2)$ ④ $(2, 2)$
⑤ $(2, 3)$



해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
 $(2, 2)$ 이다.

8. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(b) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(b) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ f^{-1}(b) &= k \text{라고 하면, } f(k) = b \\ \therefore k &= c \\ \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) &= f^{-1}(c) \\ \text{또, } f^{-1}(c) &= t \text{라고 하면, } f(t) = c \\ \therefore t &= d \\ \therefore (f \circ f)^{-1}(b) &= d \end{aligned}$$

9. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?
- ① $x \rightarrow x - 1$
 - ② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근
 - ③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지
 - ④ $x \rightarrow x^2 - 1$
 - ⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

- ① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

10. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

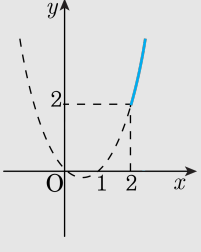
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

11. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$



12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
 $g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

13. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 3, g^{-1}(1) = 4$ 일 때, $f^{-1}(3) + g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2) = 3$ 에서 $f^{-1}(3) = 2$ 이고
 $g^{-1}(1) = 4$ 에서 $g(4) = 1$ 이므로
 $f^{-1}(3) + g(4) = 2 + 1 = 3$

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ -2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -1

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 4

해설

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = (f \circ f)^{-1}(4) = a$ 라 놓으면,

$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = 4$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$ 이므로 $f(a) = -2$

또, $f(1) = -2 \cdot 1 = -2$

$\therefore a = 1$

15. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

16. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$ 를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$$\frac{x+1}{5} = t \text{로 놓으면 } x = 5t - 1$$

$$f(t) = (5t - 1) + 2 = 5t + 1 \text{에서}$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$$\therefore f(f(x)) = f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1$$

$$= 25x + 6$$

$$\therefore f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

17. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

18. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4 - 3x$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x) = \frac{1}{3}(x + 1)$

② $h(x) = 3x - 1$

③ $h(x) = x - 3$

④ $h(x) = 3 - x$

⑤ $h(x) = x + 3$

해설

$(h \circ f)(x) = 4 - 3x$ 에서

$f(x) = t$ 라 하면 $t = 3x - 1$, $3x = t + 1$

$x = \frac{1}{3}(t + 1)$ 을 대입하면

$$h(t) = 4 - 3 \times \frac{1}{3}(t + 1) = 3 - t$$

$$\therefore h(x) = 3 - x$$

19. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x)) = x$ 가 되는 함수 $g(x)$ 는?

- ① $1-x$ ② $\frac{1}{1-x}$ ③ $\frac{x}{x-1}$ ④ $\frac{x-1}{x}$ ⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ 일 때}$$

$$g(f(x)) = x \text{ 에서 } f(x) = t \text{ 로 놓으면}$$

$$\frac{1}{1-x} = t \text{ 에서 } (1-x)t = 1, \quad t - xt = 1$$

$$xt = t - 1, \quad x = \frac{t-1}{t} \text{ 이므로 } g(t) = \frac{t-1}{t}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x}$$

20. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

21. 함수 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + ax + 3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

- ① $a \leq -3, a \geq 2$
- ② $-1 \leq a \leq 1$
- ③ $a \leq -2, a > 3$
- ④ $-2 \leq a \leq 2$
- ⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$g(x) = t$ 라 두면,
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = t^2 - t - 2 \geq 0$ 에서
 $t \leq -1, t \geq 2$ 에서
(i) $t \leq -1$
 $x^2 + ax + 3 \leq -1$
 $x^2 + ax + 4 \leq 0$ (부적절)
(ii) $t \geq 2$
 $x^2 + ax + 3 \geq 2$
 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 에서
 $D = a^2 - 4 \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 2$

22. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\tiny \neg}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\tiny \cup}$ $f(3) = 3f(1)$

$\textcircled{\tiny \cap}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{1} \textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{2} \textcircled{\tiny \cup}$

$\textcircled{3} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}$
- $\textcircled{4} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cap}$

$\textcircled{5} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \cap}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \neg}$ 뿐이다.

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여
 $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_n(x)$ (x 은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n 개)

- ① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x + 2) + 2 = x + 4 \\ f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = (x + 4) + 2 = x + 6 \\ f^4(x) &= (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = (x + 6) + 2 = x + 8 \\ &\vdots \\ f^n(x) &= x + 2n \\ \therefore f^{2007}(1) &= 1 + 2 \times 2007 = 4015 \end{aligned}$$

24. 두 일차함수가 $f(x) = ax + 2$, $g(x) = bx + c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2) = 3$, $(g \circ f)(x) = 3x - 2$ 를 만족하는 a 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x) = ax + 2$, $g(x) = bx + c$ 에서
 $g^{-1}(2) = 3$ 이면 $g(3) = 2$ 이므로
 $3b + c = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = b(ax + 2) + c$
 $= abx + 2b + c = 3x - 2$
 $\therefore ab = 3 \cdots \textcircled{2}$
 $2b + c = -2 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{3}$ 하면
 $b = 4$, $c = -10$, $a = \frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2) = 3 \Leftrightarrow g(3) = 2$
 $(g \circ f)(x) = 3x - 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 3x - 2$
 $f(x) = ax + 2$ 에서 $f(k) = ak + 2 = 3 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면
 $g(3) = g(f(k)) = 3k - 2 = 2$, $k = \frac{4}{3}$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a + 2 = 3$
 $\therefore a = \frac{3}{4}$

25. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면
 $f(a) = 1$, $f(b) = 5$
 $f(x) = 2x + 5$ 이므로
 $f(a) = 1$ 에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$
 $f(b) = 5$ 에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$
 $\therefore a + b = -2$

26. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

연립하면 $a = -1, b = 3$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$