1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |2x - 3|$으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$는 함수 f의 치역)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$에서

$f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$, $f(5) = 7$ 이므로

$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$

$\therefore\ 2 \notin f(X)$

2. 두 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a,\ b,\ c$ 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a),\ f(b),\ f(c))$ 으로 나타내면
$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),$
$(3, 2, 1)$ 이므로
X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6 개이다.

3. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

4. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x-1)(x+2)$ 에서
$f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
$f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
$\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

5. 다음 중 역함수가 존재하지 <u>않는</u> 것은?

① $y = x - 2$

② $y = x^2$

③ $y = x^3$

④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$)

⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$)

해설

일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

6. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$

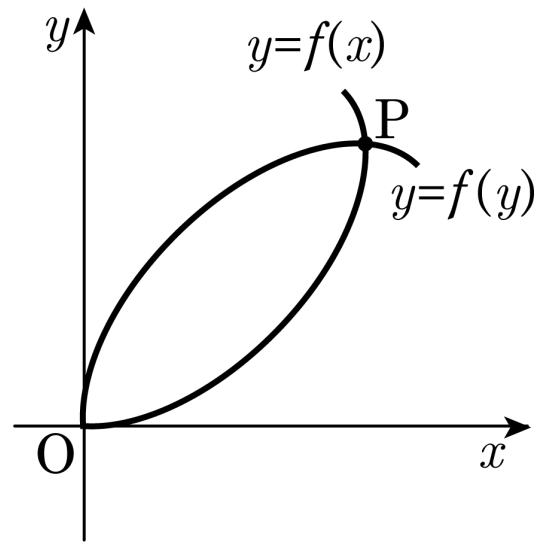
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$y = 2x - 2$, $x = \frac{1}{2}y + 1$ x, y 를 바꿔주면

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 1$

7. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

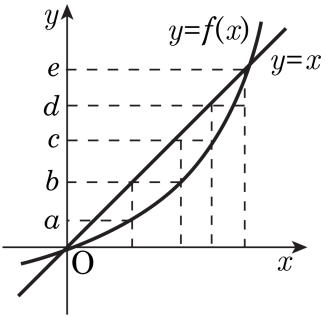
③ $(1,\ 2)$ ④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

8. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $(f\cdot f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\cdot f)^{-1}(b)=(f^{-1}\cdot f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(f^{-1}(b))$
$f^{-1}(b)=k$라고 하면, $f(k)=b$
$\therefore\ k=c$
$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$
또, $f^{-1}(c)=t$라고 하면, $f(t)=c$
$\therefore\ t=d$
$\therefore\ (f\cdot f)^{-1}(b)=d$

9. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

① $x \to x-1$

② $x \to x$ 의 양의 제곱근

③ $x \to x$ 를 4 로 나눈 나머지

④ $x \to x^2-1$

⑤ $x \to |-1|$

해설

① $x=1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1-1=0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
② $x=2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$
따라서 함수가 아니다.
③ $x=4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
④ $x=1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2-1=0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

10. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

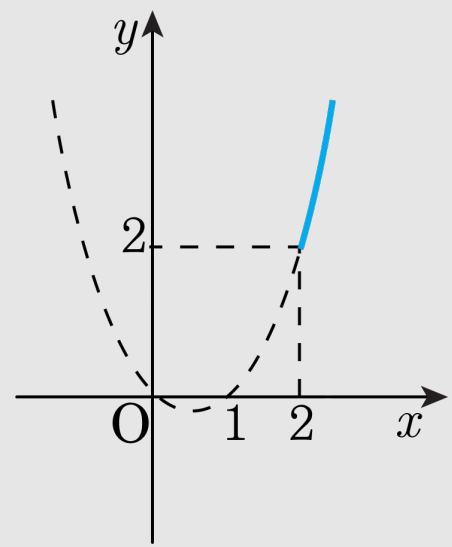
$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1, 5\}$

11. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역) 이므로
(정의역)=(치역) 이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
$\therefore\ k = 2$



12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

13. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

14. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ -2x & (x\geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1}\circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$(f^{-1}\circ f^{-1})(4)=(f\circ f)^{-1}(4)=a$ 라 놓으면,

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=4$

$f(-2)=(-2)^2=4$ 이므로 $f(a)=-2$

또, $f(1)=-2\cdot 1=-2$

$\therefore\ a=1$

15. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=1$, $(f\circ f)(x)=x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(f\circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$
따라서 $f(3)=f^{-1}(3)=1$

16. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 256

해설

$\frac{x+1}{5} = t$ 로 놓으면 $x = 5t-1$

$f(t) = (5t-1)+2 = 5t+1$ 에서

$f(x) = 5x+1$

$\therefore\ f(f(x)) = f(5x+1) = 5(5x+1)+1$

$= 25x+6$

$\therefore\ f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$

17. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

18. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x)=\frac{1}{3}(x+1)$ ② $h(x)=3x-1$

③ $h(x)=x-3$ ④ $h(x)=3-x$

⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$ 에서

$f(x)=t$ 라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\frac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\frac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

19. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x))=x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$ ② $\dfrac{1}{1-x}$ ③ $\dfrac{x}{x-1}$ ④ $\dfrac{x-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때

$g(f(x))=x$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x}=t$ 에서 $(1-x)t=1,\ t-xt=1$

$xt=t-1,\ \ x=\dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t)=\dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

20. 두 함수 $f(x)=4x-3,\ g(x)=2x+1$ 에 대하여 $h\circ g=f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=x+4$ ② $h(x)=2x-5$ ③ $h(x)=3x+2$

④ $h(x)=3x+5$ ⑤ $h(x)=5x+3$

해설

$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면

$h\circ g=f$ 에서 $a(2x+1)+b=4x-3$

$\therefore\ 2a=4,\ a+b=-3$

이것을 풀면 $a=2,\ b=-5$

따라서 $h(x)=2x-5$

21. 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x^2+ax+3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $a\leq -3, a\geq 2$ ② $-1\leq a\leq 1$ ③ $a\leq -2, a>3$

④ $-2\leq a\leq 2$ ⑤ $-1\leq a\leq 3$

해설

$g(x)=t$라 두면,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^2-t-2\geq 0$에서

$t\leq -1, t\geq 2$에서

(i) $t\leq -1$

$x^2+ax+3\leq -1$

$x^2+ax+4\leq 0$ (부적절)

(ii) $t\geq 2$

$x^2+ax+3\geq 2$

$x^2+ax+1\geq 0$에서

$D=a^2-4\leq 0$

$\therefore\ -2\leq a\leq 2$

22. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$ Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$ Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

㉠ $f(2) = 1$ ㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

23. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여 $f^n(x) = \underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x)$($x$은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은? (단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n개)

① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$f(x) = x + 2$

$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x + 2) + 2 = x + 4$

$f^3(x) = \left(f \circ f^2\right)(x) = f(f^2(x)) = (x + 4) + 2 = x + 6$

$f^4(x) = \left(f \circ f^3\right)(x) = f(f^3(x)) = (x + 6) + 2 = x + 8$

$\vdots$

$f^n(x) = x + 2n$

$\therefore f^{2007}(1) = 1 + 2 \times 2007 = 4015$

24. 두 일차함수가 $f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 로 주어질 때, $g^{-1}(2)=3$, $(g\circ f)(x)=3x-2$ 를 만족하는 a 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$f(x)=ax+2,\ g(x)=bx+c$ 에서
$g^{-1}(2)=3$ 이면 $g(3)=2$ 이므로
$3b+c=2\cdots$㉠
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=b(ax+2)+c$
$\quad=abx+2b+c=3x-2$
$\therefore\ ab=3\cdots$㉡
$2b+c=-2\cdots$㉢
㉠ − ㉢ 하면
$b=4,\ c=-10,\ a=\frac{3}{4}$

해설

$g^{-1}(2)=3 \Leftrightarrow g(3)=2$
$(g\circ f)(x)=3x-2 \Leftrightarrow g(f(x))=3x-2$
$f(x)=ax+2$ 에서 $f(k)=ak+2=3\cdots$㉠ 이라 하면
$g(3)=g(f(k))=3k-2=2$, $k=\frac{4}{3}$
㉠ 에 대입하면 $\frac{4}{3}a+2=3$
$\therefore\ a=\frac{3}{4}$

25. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$를 $f(x) = 2x + 5$로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$의 값은 얼마인가?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a$, $f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면

$f(a) = 1$, $f(b) = 5$

$f(x) = 2x + 5$ 이므로

$f(a) = 1$ 에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$

$f(b) = 5$ 에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$

$\therefore a + b = -2$

26. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$
연립하면 $a = -1, \ b = 3$
$\therefore \ f(3) = 3a + b = 0$