

1. $x^3 + ax^2 + bx - 4$ 는 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 라 하면

$$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = 3, b = -8$

$$\therefore a - b = 11$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
 $f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

3. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 다항식 $2x^2 - x - 3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a + b$ 의 값은 ?

① 3

② 1

③ -1

④ -2

⑤ -5

해설

$$2x^3 + ax^2 + bx + 3 = (2x^2 - x - 3)Q(x) \\ = (x + 1)(2x - 3)Q(x)$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } -2 + a - b + 3 = 0$$

$$\therefore a - b = -1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ 일 때, } \frac{27}{4} + \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + 3 = 0$$

$$27 + 9a + 6b + 12 = 0$$

$$\therefore 3a + 2b = -13 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } a = -3, b = -2$$

$$\therefore a + b = (-3) + (-2) = -5$$

4. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + a)(x + b)(x + c)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
 $\therefore a + b + c = 4$

5. 두 다항식 $x^3 - 3x^2 + 2x$, $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ 의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $f(3) + g(3)$ 의 값을 구하면?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x-2)^2$$

$$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$$

$$\therefore f(3) + g(3) = 3 + 18 = 21$$

6. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로
 $x^2 + ax + b$ 와 $x^2 + 3bx + 2a$ 는
모두 $x - 1$ 로 나누어 떨어져야 한다.
 $\therefore 1 + a + b = 0$ 이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2$, $b = 1$
 $\therefore a + b = -1$

7. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$
$$= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$$
$$= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$$
양변의 계수를 비교하면
$$a = k - 2, \quad b = 3 - 2k, \quad 3 = k + 1$$
$$k = 2 \text{이므로 } a = 0, \quad b = -1$$
$$\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$$

8. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{14} = 1$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

10. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$ 의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

- ① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	$9a+b+24$

이때 $k=3, c=3, a+3=4, 3a+9=d, 9a+b+24=37$

이므로

$$k=3, c=3, a=1, d=12, b=4$$

$$\text{따라서 } a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$$

11. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned}x^2+x=A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\&= (A-2)(A-12)+24 \\&= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\&= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8)=10\end{aligned}$$

12. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

- ㉠

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
- ㉡

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
- ㉢

$(x^2+x+1)(x^2-x-1)=x^4+x+1$
- ㉣

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$
- ㉤

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

㉢ $x+1=A$ 로 치환하여 전개하면
 $(x^2+A)(x^2-A)=x^4-A^2=x^4-x^2-2x-1$

13. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ \therefore a &= -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

14. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 30

② 31

③ 32

④ 33

⑤ 34

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1$$

$$= 31$$

15. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A+B+C+D$ 의 값을 구하면 ?

- ① 4
- ② 14
- ③ 24
- ④ 34
- ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(2) = A + B + C + D$ 이므로
 $f(2)$ 를 구하기 위해서는
 $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x+1=t$ 라 하면,
 $f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

1	3	0	-1	2
		3	3	2

1	3	3	2	4
		3	6	

1	3	6	8
		3	
	3	9	

 $\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$
 $\therefore A + B + C + D = 24$

16. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $[x, y, z] = xy^2 - y^2z$ 라 하자. $x - y = 2$, $xy - yz - zx = 1$ 이라 할 때, $[y, x, z] + [z, y, x]$ 의 값은?

① 0 ② -2 ③ 2 ④ -4 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} [y, x, z] &= yx^2 - x^2z, [z, y, x] = zy^2 - y^2x \\ [y, x, z] + [z, y, x] &= yx^2 - x^2z + zy^2 - y^2x \\ &= xy(x - y) - z(x^2 - y^2) \\ &= (x - y)(xy - yz - zx) \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

17. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$ 의 값은?

- ☐ $f(x)$, $g(x)$ 의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ 이다.
- ☐ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

- ① -31
- ② -11
- ☒ ③ 5
- ④ 13
- ⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x + 1)(x + 5)(x - 3)$ 에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
 $g(0) = 5$ 이 되도록 $f(x), g(x)$ 를 만들면
 $f(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$
 $g(x) = (x + 1)(x + 5) = x^2 + 6x + 5$
 $a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
 $\therefore ab - c + d = 5$

18. 두 다항식 $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3, g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$ 의 최대공약수 $G(x)$ 가 x 의 이차식일 때, ab 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$$

$$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a - b)x - 6$$

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a + b)x$$

$$= x\{2x^2 + (a + b)\}$$

$G(x)$ 는 $f(x) - g(x), f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$$\therefore 2x^2 + (a - b)x - 6 = 2x^2 + (a + b)$$

$$a - b = 0, \quad a + b = -6$$

$$\therefore a = -3, b = -3, ab = 9$$

19. 모든 x 에 대하여 $f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 6$, $f(0) = 1$ 을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 가 있다. 다음은 자연수 n 에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \dots + \alpha^n$ 을 이용하여, $f(x)$ 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (단, } a_n \neq 0 \text{) 라고 놓으면} \\ f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} + \dots + \\ &\quad a_1 \{ (x+1) - (x-1) \} \\ &= \square x^{n-1} + \dots = 6x^2 + 6 \\ \text{예} \text{서 } n &= 3, a_n = 1 \\ \therefore f(x) &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 \\ f(x+1) - f(x-1) &= 6x^2 + 4a_2 x + 2 + 2a_1 \\ \text{이} \text{므로 } a_2 &= 0, a_1 = 2 \text{ 즉, } f(x) = x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

위의 풀이 과정에서 $\square$ 에 알맞은 것은?

- ① a_n

② $2a_n$

③ na_n

④ $2na_n$

⑤ $3na_n$

해설

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x-1) &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} \dots \\ &= a_n \{ (x^n + nx^{n-1} + \dots) - (x^n - nx^{n-1} + \dots) \} + a_{n-1} \{ (x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots) - (x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \dots) \} + \dots \\ &= a_n (2nx^{n-1} + \dots) + a_{n-1} \{ 2(n-1)x^{n-2} + \dots \} + \dots \\ &= 2na_n x^{n-1} + \{ (n-2) \text{ 차 이하의 다항식} \} \\ \therefore 2na_n x^{n-1} &= 6x^2 \text{ 예} \text{서} \\ n-1 &= 2, 2na_n = 6 \\ \therefore n &= 3, a_n = 1 \end{aligned}$$

20. n 이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x - 3)$ 이 될 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x - 3)^2 Q(x) + 9^n(x - 3)$
 $x^{2n}(x - 3)(x - \alpha) = (x - 3)(x - 3)Q(x) + 9^n$ 라 놓으면,
 $x^{2n}(x - \alpha) = (x - 3)Q(x) + 9^n$ 이고
양변에 $x = 3$ 을 대입하면, $9^n(3 - \alpha) = 9^n$
 $\therefore 3 - \alpha = 1, \alpha = 2$
그러므로 $a = -5, b = 6$ 이 된다.
따라서 $a + b = 1$