1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 이차함수 $y = \frac{1}{3}(x+1)^2 + 2$ 의 최솟값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값$= 2$

▷ 정답 : $x = -1$

해설

꼭짓점의 좌표가$(-1,\ 2)$ 이므로
$x = -1$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다.

3. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x - 1$의 최댓값과 최솟값은?

① 최댓값 : 1 , 최솟값 : 없다

② 최댓값 : 1 , 최솟값 : -5

③ 최댓값 : 4 , 최솟값 : 없다

④ 최댓값 : 없다, 최솟값 : 1

⑤ 최댓값 : 1 , 최솟값 : -3

해설

$$y = -2x^2 + 4x - 1$$
$$= -2(x-1)^2 + 1$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 1을 갖는다.

또한, x^2 의 계수가 음수이므로 최솟값은 없다.

4. 이차함수 $y=-x^2+4x-3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+2x+3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

최댓값 $m=1$

$y=\frac{1}{3}x^2+2x+3=\frac{1}{3}(x+3)^2$

최솟값 $n=0$

$\therefore mn=1\times 0=0$

5. 이차함수 $y=-x^2-2x+7(-3\le x\le 1)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 4 ② 7 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=-x^2-2x+7=-(x+1)^2+8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1,8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x=-3$일 때 $y=-(-3+1)^2+8=4$
$x=1$일 때 $y=-(1+1)^2+8=4$이다.
따라서 최댓값 $a=8$이고, 최솟값 $b=4$이므로 $a+b=12$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b 일 때, $a + b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

7. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　② 5　③ 8　④ 10　⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

9. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면

$4-x=-x^2+kx \quad \Rightarrow \quad x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$

이어야 한다.

$D=(k+1)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad k+1=\pm 4$

$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

10. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

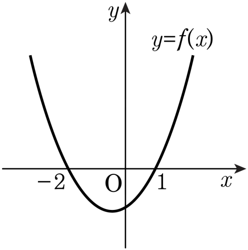
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

11. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

12. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$　② $-3 < a < 9$　③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$　⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

13. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

14. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

15. 두 실수 x, y가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 x가 실수이므로

$\dfrac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$

$(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

16. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면

$y=\frac{1}{2}\times x\times(30-2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\times x\times(30-2x) \\ &= x(15-x) \\ &= -x^2+15x \\ &= -\left(x^2-15x+\frac{225}{4}-\frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2},\frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}$ m^2 을 가진다.

17. 둘레의 길이가 $20\,\mathrm{cm}$ 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a \\ &= -(a^2-10a+25)+25 \\ &= -(a-5)^2+25 \end{aligned}$$

$a=5,\ b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

18. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm^2

▷ 정답 : $100\,\mathrm{cm}^2$

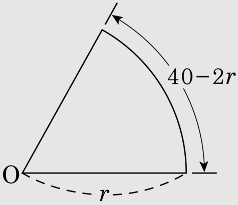
해설

부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

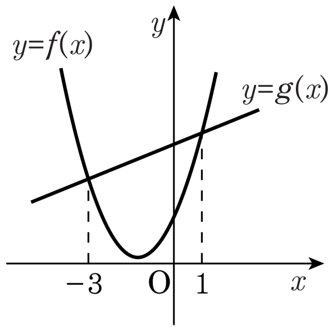
$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$
$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.



19. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a - c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x + 3)(x - 1) = 0$과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a - c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

20. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

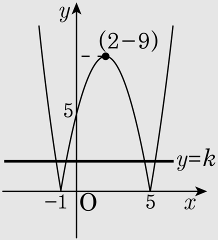
① $0<k<3$　　② $0<k<5$　　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

21. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1　　② -2　　③ 3　　④ -4　　⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$

$M = k^2 + 4k$ 이므로

$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

22. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 + 2ax + a = (x+a)^2 - a^2 + a$
최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

즉, $m = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, m 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

23. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답 : ____ cm

▶ 답 : ____ cm

▷ 정답 : 12 cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

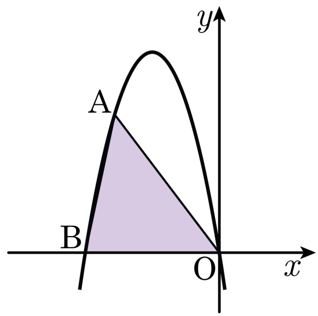
$$\begin{aligned} y &= x(24 - x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x - 12)^2 + 144 \end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144 를 갖는다.

$\therefore x = 12,\ 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

24. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18　② 27　③ 36　④ 45　⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0),\ (-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

25. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ **답 :** ______ 초 후

▷ **정답 :** 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$45 = 45 + 40x - 5x^2$

$5x^2 - 40x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 8$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.