

1. 양수 a, b 에 대하여 $\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} &= \frac{1}{6} \left(\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2\end{aligned}$$

해설

2. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &= 10 + ab + \frac{9}{ab} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

3. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

4. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
 a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

5. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

$$\begin{aligned} &|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \text{ 이므로 } (|a| + |b|)^2, |a + b|^2 \text{ 의 대소를} \\ &\text{비교하면 된다.} \\ &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2) \\ &= 2([\text{다}]) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } [\text{라}] \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

- ① 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
- ② 가: $|ab|$, 나: ab , 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$
- ③ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $|ab| - ab$, 라: ab
- ④ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: ab
- ⑤ 가: $2|ab|$, 나: $2ab$, 다: $2|ab| - 2ab$, 라: $2ab$

해설

$$\begin{aligned} &(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &(\text{단, 등호는 } ab \geq 0 \text{ 일때 성립}) \end{aligned}$$

6. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

7. 전체집합을 U , 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 두 집합 P, Q 는 $P \cap Q^c = \emptyset, Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

- $\neg$

p 이면 $\sim q$ 이다.
- $\supset$

p 이면 q 이다.
- $\oplus$

$\sim q$ 이면 p 이다.

- ①

$\neg$
- ②

$\supset$
- ③

$\oplus$
- ④

$\neg, \oplus$
- ⑤

$\supset, \oplus$

해설

$P \cap Q^c = \emptyset$ 에서 $Q^c \subset P$ 이므로
 $P \cap Q^c = Q^c = \emptyset$
 $\therefore Q = U$
① $Q^c = \emptyset$ 이므로 $P \not\subset Q^c$ 이고
 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.
② $Q = U$ 이므로 $P \subset Q$ 이고
 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
③ $Q^c = \emptyset$ 이고 $Q^c \subset P$ 이고
 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

8. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = Q$ 이다. 다음 명제 중 반드시 참인 것은?
- ① $\sim p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $q \rightarrow \sim p$

④ $\sim q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim q$

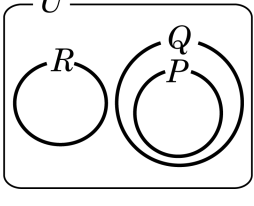
해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \text{ (차집합의 성질)} \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \text{ (분배법칙)} \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q = Q \text{ 이므로 } P \subset Q \\ P \subset Q \text{ 이면 } Q^c &\subset P^c \text{ 이므로 } \sim q \rightarrow \sim p \text{ 가 참} \end{aligned}$$

해설

$P \subset Q$ 이면 $p \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

9. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



- ① $r \rightarrow \sim q$ ② $r \rightarrow \sim p$ ③ $p \rightarrow \sim r$
 ④ $\sim q \rightarrow \sim p$ ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

- ① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.
 ② $R \subset P^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 ④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

10. 명제 ' $2x^2 + ax - 9 \neq 0$ 이면 $x - 3 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

대우인 ' $x - 3 = 0$ 이면 $2x^2 + ax - 9 = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$2 \cdot 3^2 + 3a - 9 = 0, 3a + 9 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

11. 양수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.'가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

' $x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$a - a^2 + 2 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

12. 명제 ' $x^2 + 2x + a \neq 0$ 이면 $x + 1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

대우인 ' $x + 1 = 0$ 이면 $x^2 + 2x + a = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중에서 k 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 개수를 a_k 라고 할 때, $a_1 + a_2 + a_3$ 의 값은?

① 35 ② 39 ③ 44 ④ 56 ⑤ 59

해설

- (i) 1개의 홀수를 원소로 가질 때
1을 원소로 가지고 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-1-2} = 2^3 = 8$
3 또는 5만 원소로 갖는 부분집합의 개수도 마찬가지로 방법으로 각각 8이다.
 $\therefore a_1 = 8 \times 3 = 24$
- (ii) 2개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3을 원소로 가지고, 5를 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$ (개)
1, 5 또는 3, 5만 원소로 가지는 부분집합의 개수도 마찬가지로 방법으로 각각 8이다.
 $\therefore a_2 = 8 \times 3 = 24$
- (iii) 3개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3, 5를 원소로 가지는 부분집합의 개수는 $2^{6-3} = 2^3 = 8$
 $\therefore a_3 = 8$
 $\therefore a_1 + a_2 + a_3 = 56$

14. 집합 $A = \{x \mid 7 < x < 15, x \text{는 자연수}\}$ 에 대해서, 원소 8 또는 9를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 96개

해설

$$A = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

원소 8 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 8, 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-2} = 32 \text{ (개)}$$

원소 8 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$64 + 64 - 32 = 96 \text{ (개)}$$

15. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 집합 B 의 부분집합의 개수보다 8 개 더 많을 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구한 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 7 ⑤ 9

해설

부분집합의 개수는 (2 의 거듭제곱) 개이므로
2, 4, 8, 16, 32, 64, ... 이다.
이 중에서 차가 8 인 두 수는 16 과 8 이다.
 $\therefore 2^{n(A)} = 16 = 2^4, 2^{n(B)} = 8 = 2^3$
($\because n(A) > n(B)$)
 $\therefore n(A) = 4, n(B) = 3$
 $4 - 3 = 1$

17. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 6 \text{의 배수}\}$ 가 있다.
두 집합에 대하여 $X - A = \emptyset, n(X \cap B) = 2$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
 $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 6 \text{의 배수}\} = \{6, 12, 18\}$
 $X - A = \emptyset \rightarrow X \subset A, n(X \cap B) = 2 \rightarrow$ 집합 X 는 6, 12, 18 중 반드시 2개만 원소로 가진다.
(1) 6, 12는 반드시 포함하고, 18은 반드시 포함하지 않는 집합 X 의 개수는 $2^{6-2-1} = 8$ (개)
(2) 6, 18은 반드시 포함하고, 12는 반드시 포함하지 않는 집합 X 의 개수는 $2^{6-2-1} = 8$ (개)
(3) 12, 18은 반드시 포함하고, 6은 반드시 포함하지 않는 집합 X 의 개수는 $2^{6-2-1} = 8$ (개)
따라서 집합 X 의 개수는 $3 \times 8 = 24$ (개)

