

1. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 11\text{보다 작은 홀수}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 $n(B) = 5$

$\therefore n(A) + n(B) = 7 + 5 = 12$

2. 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 4\text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 중에서 그 원소의 개수가 1 개인 것의 개수와 원소의 개수가 2 개인 것의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 : 6 개

▶ 정답 : 6 개

해설

$X = \{1, 2, 3\}$
원소의 개수가 1 개인 X 의 부분집합 :
 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
원소의 개수가 2 개인 X 의 부분집합 :
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
따라서 $3 + 3 = 6$

3. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3, a+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $A = \{1, 2, 3\} \therefore a = 3$

$B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 원소의 합은 10 이다.

4. 두 조건 $A = \{1, a^3 - 3a\}$, $B = \{a + 2, a^2 - a\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2\}$ 가 되도록 상수 a 의 값을 정할 때, 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$A \cap B = \{2\}$ 을 만족하려면 A 에서 $a^2 - a = 2$, $a^2 - a - 2 = 0$, $a = -1$ or 2
 $a = -1$ 이면, $B = \{1, 2\}$ 가 되어 $A \cap B = \{1, 2\}$ 즉, 조건에 어긋난다.

$\therefore a = 2$ 이면, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 4\}$

$\therefore 1 + 2 + 4 = 7$

5. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

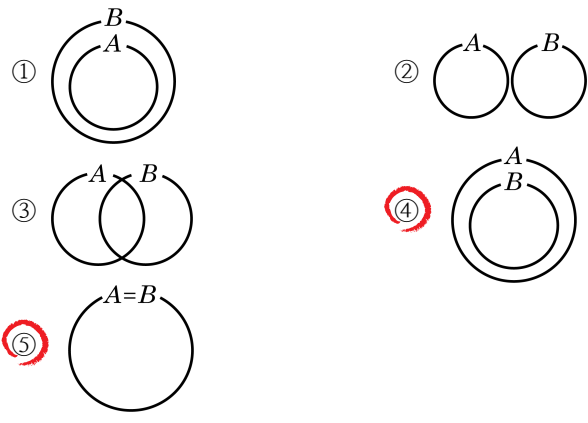
▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

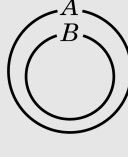
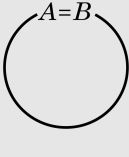
$\square$ 는 24의 약수이다.
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

6. 다음 중 $B \subset A$ 인 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것을 모두 고르면? (정답 2개)



해설

A 집합의 모든 원소가 B 집합의 원소가 되는 그림을 찾으려면

④  와 ⑤  뿐이다.

7. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $A \cup \{3, 4, 5\} = U$, $A \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ 을 만족하는 집합 A 의 진부분집합 개수를 구하여라.

▶ 답 : 31 개

▷ 정답 : 31개

해설

조건 $A \cup \{3, 4, 5\} = U$ 에서 집합 A 는 원소 1, 2, 6, 7을 반드시 포함해야 한다.

또, 조건 $A \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ 에서 집합 A 는 원소 3은 포함하고, 4, 5는 포함하지 않아야 한다.

따라서, 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^5 - 1 = 31(\text{개})$$

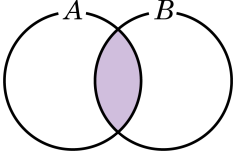
8. 두 집합 $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 집합 X 는 집합 B 에 포함되고, 집합 A 는 집합 X 에 포함될 때, 이를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 a, c 를 모두 포함하는 집합이므로
구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

9. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 를 벤다이어그램으로 나타낼 때 어두운 부분에 들어갈 원소를 모두 적어라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 27

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots\}$

$B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\} = \{1, 3, 9, 27\}$

어두운 부분은 두 집합 A, B 의 교집합이므로

$A \cap B = \{3, 27\}$

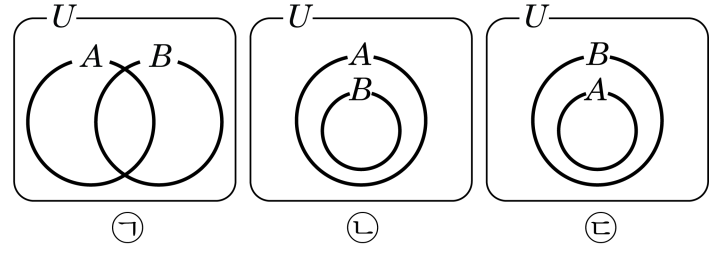
10. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $X \subset (A \cup B)$ ② $(A \cap B) \subset X$
③ $(A \cup B) \subset X$ ④ $A \cap B = \emptyset$
⑤ $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

해설

$(A \cup B) \cap X = X$ 이면 $X \subset (A \cup B)$ 이다.
② $(A \cap B) \subset X$ 라고 말할 수 없다.
④ $A \cap B = \emptyset$ 라고 말할 수 없다.

11. 다음 벤 다이어그램 중 $B^c \subset A^c$ 인 관계를 만족하는 것을 골라라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$A \subset B$ 일 때, 벤 다이어그램을 그리면 $B^c \subset A^c$ 이다.

U

B

A

12. 전체집합 $U = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 서로 다른 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $(X \cup Y) - (X \cap Y)$ 의 가장 큰 원소가 X 에 속할 때, $Y \lll X$ 라 하자. U 의 부분집합 $A = \{3, 4, 7\}$, $B = \{4, 6, 7\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 옳은 것은?
- ① $A \lll B \lll C$ ② $A \lll C \lll B$
 ③ $B \lll A \lll C$ ④ $B \lll C \lll A$
 ⑤ $C \lll A \lll B$

해설

- i) 집합 A, B 에 대하여
 $(A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 6\}$
 $6 \in B$ 이므로 $A \lll B \cdots \textcircled{\tiny 1}$
 ii) 집합 B, C 에 대하여
 $(B \cup C) - (B \cap C) = \{5, 7\}$
 $7 \in B$ 이므로 $C \lll B \cdots \textcircled{\tiny 2}$
 iii) 집합 A, C 에 대하여
 $(A \cup C) - (A \cap C) = \{3, 5, 6, 7\}$
 $7 \in A$ 이므로 $C \lll A \cdots \textcircled{\tiny 3}$
 $\therefore \textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 2}, \textcircled{\tiny 3}$ 에서 $C \lll A \lll B$

13. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n 이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n 이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$
 $p_2 : 16$ 의 양의 약수는 모두 짝수이다.
 $p_3 : \sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 & (p_n \text{이 명제이다.}) \\ -1 & (p_n \text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다. ($\because x$ 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

$p_2 : \text{거짓}, p_3 : \text{거짓} \rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$$\therefore f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = (-1) + 1 + 1 = 1$$

14. 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 두 조건 $p: f(x) = 0, q: g(x) = 0$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 조건 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 을 만족하는 집합은?

① $P \cap Q$

② $P \cup Q$

③ $P - Q$

④ $Q - P$

⑤ $P^c \cup Q^c$

해설

조건 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 을 만족시키는 집합은 $\{x \mid f(x) = 0 \text{이고 } g(x) = 0\}$ 이므로
주어진 조건을 만족하는 집합은 $P \cap Q$

15. 명제 ‘ $p(x)$ 이면 $q(x)$ 가 아니다’가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $P \subset Q^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $P \cup Q = P$

해설

‘ q 가 아니다’를 만족시키는 집합은 Q^c
따라서 ‘ p 이면 q 가 아니다’가 참이면 $P \subset Q^c$

16. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 $p : x$ 는 18의 약수, $q : x$ 는 12의 약수」

- ① {1, 2, 3, 6}
- ② {6, 12, 9, 8}
- ③ {9, 18}
- ④ {12, 18}
- ⑤ {6, 9, 18}

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

17. 명제 ' $|x-1| \leq a$ 이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위는?
(단, x, y 는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \leq 2$

② $0 < a < 2$

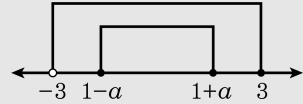
③ $0 < a \leq 4$

④ $0 < a < 4$

⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \leq a$ 에서 $-a \leq x-1 \leq a \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$ $|x| < 3$ 에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3 \therefore a < 4$ 그리고 $a < 2 \therefore a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

18. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

- ① $x = 0$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.
- ③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다.
- ④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
- ⑤ $a = b$ 이고 $c = d$ 이면 $a + c = b + d$ 이다.

해설

역인 명제는
① $xy = 0$ 이면 $x = 0$ (거짓) (반례 : $x = 1, y = 0$)
② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x = -1$)
③ $x + y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x = 2, y = 0$)
④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ (참)
⑤ $a + c = b + d$ 이면 $a = b$ 이고 $c = d$ (거짓) (반례 : $a = -1, b = -2, c = 3, d = 4$)

19. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 보기 중 참인 명제는 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $q \rightarrow \sim p$

㉡ $q \rightarrow r$

㉢ $\sim q \rightarrow \sim r$

㉣ $r \rightarrow \sim p$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $r \rightarrow q$ 가 참이므로 각각의 대우인 $q \rightarrow \sim p$ 와 $\sim q \rightarrow \sim r$ 도 참이다. 또, $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim q \rightarrow \sim r$ 로부터 $p \rightarrow \sim r$ 이 참이고 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다. 따라서 보기 중 참인 명제는 ㉠, ㉢, ㉣이다.

20. 두 실수 a, b 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건을 모두 고르면?

- ① $p : |a| + |b| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ② $p : a^2 + b^2 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ③ $p : a + b \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ④ $p : a^2 + b^2 + 2|ab| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ⑤ $p : a^3 + b^3 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

해설

$q \rightarrow p$ 이므로, $\sim p \rightarrow \sim q$ 인지 확인한다.
① $|a| + |b| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
② $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
③ $a + b = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 4, b = -4$
④ $a^2 + b^2 + 2|ab| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
⑤ $a^3 + b^3 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 3, b = -3$

21. $x-1 \neq 0$ 이 $x^2+ax+1 \neq 0$ 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 a 의 값으로 옳은 것은?

① $a \neq 1, a \neq -2$ ② $a \neq 1$ ③ $a = 1$

④ $a \neq 2$ ⑤ $a = -2$

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건 : $q \Rightarrow p$

$x^2+ax+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

대우를 만들면 $x=1 \Rightarrow x^2+ax+1=0$

$1+a+1=0, \therefore a=-2$

22. 조건 p, q, r, s 에서 p, q 는 어느 것이나 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이라 한다. 이 때, r 은 s 이기 위한 무슨 조건인가?

- ① 필요조건 ② 충분조건
③ 필요충분조건 ④ 아무 조건도 아니다.
⑤ 위 사실로는 알 수 없다.

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로

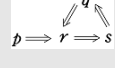
$p \Rightarrow r$ 같은 방법으로 하면

주어진 조건으로부터 $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$

$$\therefore r \Rightarrow s \text{ 이고 } s \Rightarrow r \text{ 이므로 } r \leftrightarrow s$$

따라서, r 은 s 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서, f 는 S 이기 위한 필요충분조건이다.



23. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

24. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ a ^2 = a^2$	㉡ $ ab \geq ab$
㉢ $ a + b \geq a - b $	㉣ $ a - b \geq a - b $

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉣ $(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$
 $= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2$
 $= 2(ab - |ab|) \leq 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

25. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$ 이 절대부등식이 되기 위한 정수 a 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0$ 이어야 하므로

$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$

$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개

26. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + 2 \geq 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$$

27. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

- ㉠ 우리 반에서는 100 m를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1 시간씩 달리기 연습을 한다.
- ㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.
- ㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.
- ㉤ 평균이 85점 이상인 학생은 우등생이다.
- ㉥ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임
- ㉦ 영토가 아름다운 국가의 모임
- ㉧ 10에 가장 가까운 자연수의 모임

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ ‘잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉡ ‘좋은’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉤ ‘비교적’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉥ ‘아름다운’은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

28. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수는?

$B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4$

- ① 4개
- ② 6개
- ③ 8개
- ④ 10개
- ⑤ 12개

해설

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 $B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4$ 이므로
 $B = \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 9\}, \{1, 2, 3, 18\},$
 $\{2, 3, 6, 9\}, \{2, 3, 6, 18\}, \{2, 3, 9, 18\}$

29. 자연수 전체의 두 부분집합 A, B 가 각각 $A = \{a \mid a \text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $B = \{b \mid b \text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 일 때, $(B - A) \cup X = X$, $B \cap X = X$ 를 모두 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14 개 ⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이므로 $B - A = \{8, 16\}$

또 $(B - A) \cup X = X$ 에서

$(B - A) \subset X$, $B \cap X = X$ 에서 $X \subset B$ 이므로 $(B - A) \subset X \subset B$

$\therefore \{8, 16\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 8, 16\}$

즉, 집합 X 는 8, 16 을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합
이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

30. 다음은 현수네 반 학생 40 명을 대상으로 조사한 내용이다. 보기의 내용 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답2개)

자장면을 좋아하는 학생 : 22 명
짬뽕을 좋아하는 학생 : 12 명
두 가지 다 좋아하지 않는 학생 : 8 명

- ① 자장면 또는 짬뽕을 좋아하는 학생은 $40 - 8 = 32$ 명이다.
- ② 두 가지를 다 좋아하는 학생은 $22 + 12 - 32 = 2$ 명이다.
- ③ 자장면과 짬뽕을 좋아하는 학생들의 집합을 각각 A, B 라 하면 둘 다 좋아하는 학생들의 집합은 $A \cup B$ 라고 표현 할 수 있다.
- ④ 자장면 또는 짬뽕을 좋아하는 학생은 전체 학생 수보다 많다.
- ⑤ 자장면을 A , 짬뽕을 B 라 하면 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $(A \cup B)^c$ 라고 표현 할 수 있다.

해설

- ③ 자장면과 짬뽕 둘 다 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
- ④ $n(A \cup B) \leq n(U)$ 이다.

31. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 가 최대일 때, a 와 b 사이의 관계는?

① $b = 2a$

② $a = 2b$

③ $a = b$

④ $a^2 = b$

⑤ $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$ 일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

32. 유리수 전체의 집합을 Q 라 하고, 자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 집합 A_n 을 $A_n = \left\{ x \mid x - [x] = \frac{1}{n}, x \in Q \right\}$ 로 정의할 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타낸다.)

- ① $-\frac{4}{3} \in A_3$
 ② $A_2 \subset A_4$
- ③ $A_4 \subset A_2$
 ④ $A_2 \cap A_3 = \emptyset$
- ⑤ $A_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{51}{5} \right\}$

해설

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내므로 간단하게 정수라고 생각하면 되고, $x - [x]$ 는 x 의 소수 부분이다. 따라서 구하고자 하는 집합 A_n 의 원소 x 는 $x = [x] + \frac{1}{n}$ 이다.
 $[x]$ 가 정수이므로 집합 A_n 은
 $A_n = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}, 0 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, \dots \right\}$ 이 되고,
 n 대신에 2, 3, 4, 5, ...를 각각 대입해서 $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$ 를 구해 보면

$$A_2 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}, 0 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots \right\}$$

$$A_4 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{4}, -1 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots \right\}$$

$$A_5 = \left\{ \dots, -2 + \frac{1}{5}, -1 + \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, -\frac{9}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \dots \right\}$$

이므로 $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ 임을 알 수 있다.

33. 집합 S 의 부분집합 A, B 가 있다. $n(A \cap B) = 0$, $A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = \{b, c, d, e, f\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$A^c = \{a, c, e\}, S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\},$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\},$$

$$n(A \cap B) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\},$$

$$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\},$$

$$\text{따라서 } A \cup B = \{a, b, d, f\},$$

$$\therefore n(A \cup B) = 4$$

34. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각 $A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\}$, $B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\}$ 일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x|x = p + 2q, p \in N, q \in N\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$
 $B = \{x|x \text{는 두 자리 자연수}\} = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$
 $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로
 $n(A^c \cup B)^c = 7$

35. 실수 x 에 대하여, 분수식 $\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^2+1)} \\ &= (x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} + 1 \\ & x^2+1 > 0 \text{ 이므로,} \\ & (x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} \geq 2 \cdot \sqrt{(x^2+1) \cdot \frac{4}{(x^2+1)}} = 4 \\ & \therefore (x^2+1) + \frac{4}{(x^2+1)} + 1 \geq 4+1=5 \end{aligned}$$