1. 다항식 x^3-2를 x^2-2로 나눈 나머지는?

① 2 ② -2 ③ $-2x-2$

④ $2x+2$ ⑤ $2x-2$

해설

$$\frac{x^3-2}{x^2-2}=\frac{x^3-2x+2x-2}{x^2-2}=x+\frac{2x-2}{x^2-2}$$

$\therefore$ 몫은 x, 나머지는 $2x-2$

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x+1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x+1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x+1)$

$\quad = x^2 + 2x + 2$

3. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16} - 1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$
③ $(-x+3)^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8 - 1$

4. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2+b^2-c^2+2ab$
④ $a^2-b^2-c^2+2bc$
⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$$(a+b-c)(a-b+c)$$
$$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=a^2-b^2-c^2+2bc$$

5. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$

$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$

(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로

$ab+2=0,\ a+2=0$

따라서 $a=-2,\ b=1$

$\therefore a+b=-1$

6. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$
$$= -2A + 5B - 4C$$
$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$
$$= -3x^2 - 24x + 21$$

7. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차　② 3차　③ 6차　④ 7차　⑤ 8차

해설

$$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$$

$$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$$

$\therefore$ 6차 다항식

8. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times 2\times 10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times 10^{10}+12\times 10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times 6+10^5\times 12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

9. $f(x)$가 x의 다항식일 때, $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때, $2a-b$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

준 식의 양변에

$x^2=2$를 대입하면 $4a+b=-16$

$x^4=-1$을 대입하면 $-a+b=-1$

$\therefore\ a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ 2a-b=-2$

10. 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$가 x^2-x+1로 나누어떨어질 때, $a-b$의 값은?

① -4　② -2　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$2x^3+ax^2+x+b$

$=(x^2-x+1)(2x+c)$

$=2x^3+(c-2)x^2+(2-c)x+c$

$\therefore\ a=c-2,\ 1=2-c,\ b=c$

$c=1$이므로 $a=-1, b=1$

$\therefore\ a-b=-2$

11. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$, $P(0)=0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$P(0)=0$에서 $c=0$ $\therefore$ $P(x)=ax^2+bx$

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$이므로

$a(x^2+1)^2+b(x^2+1)=(ax^2+bx)^2+1$

$ax^4+2ax^2+a+bx^2+b=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=a^2,\ 2ab=0,\ 2a+b=b^2,\ a+b=1$

$a^2=a$와 $a+b=1$에서

$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데

이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b=b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b)=(0,\ 1)$

즉, $P(x)=x$뿐이다.

$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$에서 $x=0$을 대입하면

$P(1)=\{P(0)\}^2+1$이 된다.

$P(1)=1$($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x=1$대입)

12. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0\quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

13. 등식 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10}　② -2^9　③ 0　④ 2^9　⑤ 2^{10}

해설

$(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉢

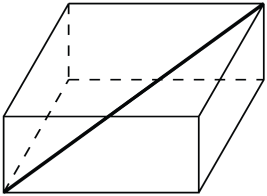
㉡ + ㉢을 하면

$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

14. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c\text{는양수})$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots ①$

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

15. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\quad\therefore\ a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$