

1. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

a, b 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에서

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

2. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 가 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에서 정의되어 있을 때, $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X 의 원소의 개수를 a 개라 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

$f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면

$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 에서 $(x+2)$ 가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$ 가 2의 배수인 x 는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

1) $(x+2)$ 가 4의 배수일 경우 : $x = 2, 6, 10$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일 경우 : $x = 1, 5, 9$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일
 $\therefore x-1 = 2, 5, 6, 9, 10$

$\therefore x = 1, 2, 5, 6, 9, 10$
따라서 $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.

$$\therefore a = 4$$