1. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

2. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$가 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면
$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$에서 $(x+2)$가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
1) $(x+2)$가 4의 배수일 경우 : $x = 2,\ 6,\ 10$
2) $(x-1)$이 4의 배수일 경우 : $x = 1,\ 5,\ 9$
$\therefore\ x = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$
따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 $3,\ 4,\ 7,\ 8$의 4개이다.
$\therefore\ a = 4$