

1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

2. 세 함수 $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = |x + 5|$ 에 대하여 $(h \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -8 \text{ 이므로}$$

$$(h \circ g \circ f)(1) = (h \circ (g \circ f))(1)$$

$$= h((g \circ f)(1)) = h(-8) = |-8 + 5|$$

$$= 3$$

3. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

6. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$ 를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$$\frac{x+1}{5} = t \text{로 놓으면 } x = 5t - 1$$

$$f(t) = (5t - 1) + 2 = 5t + 1 \text{에서}$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$$\therefore f(f(x)) = f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1$$

$$= 25x + 6$$

$$\therefore f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

7. 두 함수 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $-6x + 3k + 2 = -6x - 4 + k$
 $2k = -6$ 에서 $k = -3$

8. 함수 $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $f^{10}(x) = ax + b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $2^{10} - 1$
- ② 2^{10}
- ③ $2^{11} - 1$
- ④ 2^{11}
- ⑤ $2^{12} - 1$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) \\ &= 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(2x - 1) \\ &= 4(2x - 1) - 3 = 8x - 7 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(2x - 1) \\ &= 8(2x - 1) - 7 = 16x - 15 \\ &\vdots \\ f^{n-1} &= 2^{n-1} \cdot x - (2^{n-1} - 1) \text{로 놓으면} \\ f^n(x) &= (f^{n-1} \circ f)(x) = f^{n-1}(f(x)) \\ &= f^{n-1}(2x - 1) = 2^{n-1}(2x - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n x - (2^n - 1) \end{aligned}$$

$n = 10$ 을 대입하면 $f^{10}(x) = 2^{10}x - (2^{10} - 1)$ 이므로
 $\therefore a = 2^{10}$, $b = -2^{10} + 1$ 이다.
 $\therefore a - b = 2^{10} + 2^{10} - 1 = 2^{11} - 1$

9. 함수 $f(x) = -x + 3$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\dots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의 할 때, $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(2) + f^{(4)}(2) + \dots + f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3006

해설

$$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 3) = x$$

$$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(f^{(2)}(x))$$

$$= f(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{(2k-1)}(x) + f^{(2k)}(x) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f^{(2)}(1) = 3, \dots$$

$$f^{(2003)}(1002) + f^{(2004)}(1002) = 3 \text{ 이다.}$$

$$3 \text{ 이 } 1002 \text{ 개이므로 } 3 \times 1002 = 3006$$

10. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히

많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는

$y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1, b = 2$ 이므로 $ab =$

-2

