

1. 다음 중 x 에 관한 이차방정식인 것은?

① $2x - 1 = 0$

② $(x - 2)^2 = (x - 3)^2$

③ $x^2 + x = x^2 - 1$

④ $3x = x^2 + x - 1$

⑤ $2x^2 + x - 1 = x(2x - 1)$

해설

이차방정식은 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 꼴이어야 한다.

① $2x - 1 = 0$: 일차방정식

② $2x - 5 = 0$: 일차방정식

③ $x + 1 = 0$: 일차방정식

⑤ $2x - 1 = 0$: 일차방정식

2. 이차방정식 $3(x-3)^2 = p$ 가 중근을 가진다고 할 때, 상수 p 의 값과 중근은?

- ① $p = 0, x = 3$ ② $p = 3, x = 3$ ③ $p = 0, x = -3$
④ $p = 3, x = 0$ ⑤ $p = -3, x = 3$

해설

중근을 가지기 위한 조건은
(완전제곱식) = 0 이므로

$3(x-3)^2 = p, (x-3)^2 = \frac{p}{3}$ 이므로 $p = 0$ 이다.

또한 중근은 $x = 3$ 이다.

3. 다음 보기에서 이차방정식 중에서 중근을 갖는 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $(x-4)(x-4)=0$
- ㉡ $x^2-4x=0$
- ㉢ $x^2+9=6x$
- ㉣ $2x^2+12x=-9$
- ㉤ $(x-1)(x+1)=12x^2-5x$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉣, ㉤

해설

이차방정식이 중근을 가지려면 $(ax+b)^2=0$ 이다.
㉠ $x=4$ (중근)
㉢ $x^2+9=6x$
 $x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0$
 $\therefore x=3$ (중근)

4. 이차방정식 $2x^2+8x+3=0$ 의 두 근을 k, m 이라 할 때, $2(k^2+km+m^2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$$\begin{aligned}k+m &= -4, \quad km = \frac{3}{2} \\2(k^2+km+m^2) &= 2\{(k+m)^2-km\} \\&= 2\left\{(-4)^2-\frac{3}{2}\right\} \\&= 29\end{aligned}$$

5. 다음은 연속하는 두 홀수의 곱이 143일 때, 두 홀수를 구하는 과정이다. (가)에 알맞은 수는?

연속하는 두 홀수를 각각 x , $x + 2$ 라고 하면
 $x(x + 2) = 143$, $x^2 + 2x - 143 = 0$, $(x - 11)(x + 13) = 0$
 $\therefore x = \boxed{\text{가}}$ ($x > 0$)

- ① 11 ② -13 ③ 143 ④ 2 ⑤ 0

해설

연속하는 두 홀수를 각각 x , $x + 2$ 라 하면
 $x(x + 2) = 143$, $x^2 + 2x - 143 = 0$, $(x - 11)(x + 13) = 0$
 $\therefore x = 11$ ($x > 0$)

6. 어떤 원의 반지름의 길이를 5cm 늘였더니, 그 넓이는 처음 원의 넓이의 6배가 되었다. 처음 원의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $1 + \sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}\pi(x+5)^2 &= 5\pi x^2 \\ x^2 + 10x + 25 &= 5x^2 \\ 5x^2 - 10x - 25 &= 0 \\ x^2 - 2x - 5 &= 0 \\ x &= 1 + \sqrt{6} (\because x > 0)\end{aligned}$$

7. 이차방정식 $x^2 - 3x + k = 0$ 의 근이 $x = 3 - \sqrt{2}$ 일 때, k 의 값은?

① $\sqrt{2} - 2$

② $2\sqrt{2} - 2$

③ $3\sqrt{2} - 2$

④ $4\sqrt{2} - 2$

⑤ $5\sqrt{2} - 2$

해설

$x^2 - 3x + k = 0$ 의 한 근이 $x = 3 - \sqrt{2}$ 이므로,

$x = 3 - \sqrt{2}$ 를 $x^2 - 3x + k = 0$ 에 대입하면

$$(3 - \sqrt{2})^2 - 3(3 - \sqrt{2}) + k = 0$$

$$9 - 6\sqrt{2} + 2 - 9 + 3\sqrt{2} + k = 0$$

$$-3\sqrt{2} + 2 + k = 0$$

$$\therefore k = -2 + 3\sqrt{2}$$

8. 이차방정식 $x^2 + 5ax + 6 = 0$ 의 한 근이 3 일 때, 다른 한 근을 고르면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$9 + 15a + 6 = 0$$

$$15a = -15$$

$$\therefore a = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

9. 다음 방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$3x^2 - x - 4 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(x + 1)(x + 3) = 0$$
$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -3$$
$$3x^2 - x - 4 = 0$$
$$(x + 1)(3x - 4) = 0$$
$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$

따라서 공통근은 $x = -1$ 이다.

10. $x^2 + 4x + 4 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ (증근) ② $x = -3$ (증근) ③ $x = 5$ (증근)
④ $x = 1$ (증근) ⑤ $x = 3$ (증근)

해설

$(x + 2)^2 = 0, x + 2 = 0, x = -2$ (증근)

11. 이차방정식 $(3x-2)^2=5$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

$$(3x-2)^2=5$$

$$3x-2=\pm\sqrt{5}$$

$$3x=2\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \frac{2+\sqrt{5}}{3}+\frac{2-\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{3}$$

12. 이차방정식 $6x^2+x-1=0$ 의 두 근의 합과 곱을 근으로 하고 일차항의 계수가 1 인 이차방정식의 일차항의 계수는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $-\frac{1}{36}$

해설

두 근의 합은 $-\frac{1}{6}$, 두 근의 곱은 $-\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{6}$ 을 중근으로 갖는 이차방정식이므로

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = 0$$

따라서 일차항의 계수는 $\frac{1}{3}$ 이다.

13. 한 근이 $5 - 2\sqrt{3}$ 인 이차방정식을 $4x^2 + bx + c = 0$ 의 꼴로 나타낼 때, $c - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 92

해설

다른 한 근이 $5 + 2\sqrt{3}$ 이므로
(두 근의 합) $= 10$, (두 근의 곱) $= 13$
따라서 $4(x^2 - 10x + 13) = 0$ 이므로
 $4x^2 - 40x + 52 = 0$ 이다.
따라서 $b = -40, c = 52$, $c - b = 92$

14. 다음 보기를 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.

보기

1부터 n 까지의 합 : 210

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\frac{n(n+1)}{2} = 210$ 이므로 $n^2 + n - 420 = 0$ 이다.

$(n-20)(n+21) = 0$

$\therefore n = 20 (\because n > 0)$

15. 이차방정식 $2x^2 - 7x + 2 = 0$ 의 두 근 중에서 큰 것을 m 이라 하면 $n < m < n + 1$ 이다.

정수 n 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 2 &= 0, 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) = -2 \\ 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) &= -2 + \frac{49}{8} \\ 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 &= \frac{33}{8}, \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{16} \\ x &= \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4} \\ \therefore m &= \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \\ 5 &< \sqrt{33} < 6 \\ \frac{7+5}{4} < m < \frac{7+6}{4}, 3 < m < 3.25 \\ 3 < m < 4 \\ \therefore n &= 3 \end{aligned}$$

16. 이차방정식 $x^2 + (m - 4)x + 40 = 0$ 의 두 근의 차가 3일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① 큰 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m = 17$ 이다.
 - ② 주어진 식을 만족하는 해는 8, 5 또는 $-5, -8$ 이다.
 - ③ 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 9이다.
 - ④ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m < 0$ 이다.
 - ⑤ 모든 m 의 값의 곱은 0보다 작다.

해설

두 근을 $\alpha, \alpha - 3$ 이라 하면

$$\alpha(\alpha - 3) = 40$$

$$\alpha = 8 \text{ 또는 } \alpha = -5$$

따라서 두 근은 8, 5 또는 $-5, -8$ 이다.

두 근의 합은 $13 = 4 - m, m = -9$ 또는 $-13 = 4 - m, m = 17$

따라서 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 8이다.

17. 이차방정식 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 의 두 근을 m, n 이라 할 때, 다음 보기중 옳은 것을 모두 골라 기호로 써라.

보기

㉠ $m^2 + n^2 = 22$

㉡ $(m - n)^2 = m^2 n^2$

㉢ $|n - m| \geq -3mn$

㉣ $\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = -\frac{22}{3}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉢

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$m + n = -4, mn = -3$ 이다.

㉠ : $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 16 - 2(-3) = 22$

㉡ : $(m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn$
 $= (-4)^2 - 4(-3)$
 $= 16 + 12$
 $= 28 \neq m^2 n^2$

㉢ : ㉡에 의해

$|n - m| + 3mn = |\pm 2\sqrt{7}| - 9 < 0$

㉣ : $\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = -\frac{22}{3}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

18. 이차방정식 $4x^2 + 8x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 의 근은 $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2$ 이다. 이 때, $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2)^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x^2 + bx + c = 0$ 의 근이 $-2, \frac{3}{2}$ 이므로

$$-b = -2 + \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$c = -2 \times \frac{3}{2} = -3$$

$$\therefore b + c = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

19. $[f(x)]_b^a = f(a) - f(b)$ 라고 할 때, $[x^2 - 5x]_1^a = 0$ 을 만족하는 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

해설

$$\begin{aligned} [x^2 - 5x]_1^a &= 0 \\ (a^2 - 5a) - (1 - 5) &= 0 \\ a^2 - 5a + 4 &= 0 \\ (a - 1)(a - 4) &= 0 \\ \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 4 \\ \therefore a = 4 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

20. $4x^2 - 36[x] + 45 = 0$ 을 만족하는 실수 x 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$36[x]$ 는 짝수, $36[x] + 45$ 는 홀수이므로 $4x^2$ 은 홀수이어야 한다.

따라서 $4x^2 = 2m + 1$ 이라 하면, $x = \frac{\sqrt{2m+1}}{2}$ (단, m 은 음이 아닌 정수)

$$4\left(\frac{\sqrt{2m+1}}{2}\right)^2 - 36\left[\frac{\sqrt{2m+1}}{2}\right] + 45 = 0$$

$$(2m+1) - 36\left[\frac{\sqrt{2m+1}}{2}\right] + 45 = 0$$

$$\left[\frac{\sqrt{2m+1}}{2}\right] = \frac{m+23}{18}$$

$$\frac{m+23}{9} \leq \sqrt{2m+1} < \frac{m+41}{9}$$

각 변을 제곱하면 $(m-58)^2 \leq 54^2$, $(m-40)^2 > 0$ 이다.

$(m-40)^2 > 0$ 는 $m \neq 40$ 인 모든 실수에 대해서 성립하므로 $m \neq 40$ 이다.

$(m-58)^2 \leq 54^2$ 를 보면 $(m-58)^2 - 54^2 \leq 0$, $4 \leq m \leq 112$

$m \neq 40$ 이므로 $4 \leq m < 40$, $40 < m \leq 112$ 이다.

이 중에서 $\frac{m+23}{18}$ 이 정수인 것은,

$m = 13, 31, 49, 67, 85, 103$

$\therefore x = \frac{\sqrt{27}}{2}, \frac{\sqrt{63}}{2}, \frac{\sqrt{99}}{2}, \frac{\sqrt{135}}{2}, \frac{\sqrt{171}}{2}, \frac{\sqrt{207}}{2}$ (6 개)