

1. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $f : x \rightarrow x$

② $f : x \rightarrow -2|x|$

③ $f : x \rightarrow x^2$

④ $f : x \rightarrow x + 3$

⑤ $f : x \rightarrow |3x| + 1$

해설

③ $y = f(x) = x^2$ 에서

$f(-1) = (-1)^2 = 1 \in Y$, $f(0) = 0^2 = 0 \in Y$, $f(1) = 1^2 = 1 \in Y$
따라서 함수이다.

2. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

3. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것은 무엇인가?

$$\textcircled{1} \quad y = -x^2$$

② $y = -|x|$

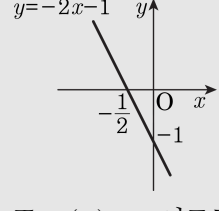
③ $y = 3$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.



② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) \equiv f(1) \equiv -$

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)
 ③ 모든 $x \in Y$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로
일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합)이므로 일대일 대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로

일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역)이다.

4. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기의 X 에서 X 로의 함수 중
항등함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x$

㉡ $g(x) = x^3$

㉢ $h(x) = x^2 + 2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로
 $f(x)$ 는 항등함수이다.

㉡ $g(-1) = -1, g(0) = 0, g(1) = 1$ 이므로
 $g(x)$ 는 항등함수이다.

㉢ $h(-1) = 3, h(0) = 2, h(1) = 3$ 이므로
 $h(x)$ 는 항등함수가 아니다.

5. 분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(f(x)) = x^3$ 을 만족시키는 x 의 값을 모두 구한 것을 고르면?

- ① -1 ② 0 ③ -1, 0
④ 0, 1 ⑤ -1, 0, 1

해설

분수함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에서

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\frac{x}{x-1}-1}}{\frac{x}{\frac{x}{x-1}-1}-1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$$

즉, $x = x^3$ 에서 $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore x = -1, 0, 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 구하는 x 의 값은 -1, 0

6. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 라 할 때, 함수 $f : S \rightarrow S$ 는 일대일 함수이다. $f(1) = 2, f(3) = 4$ 이고, $(f \circ f \circ f)(5) = 1$ 이라 하면 $f(2)$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

해설

$f(1) = 2, f(3) = 4$ 이고, f 가 일대일 함수이므로 $f(5)$ 는 1, 3, 5 중의 하나이다.

i) $f(5) = 1$ 이라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(1)) = f(2) = 1$ 이므로 모순이다.

ii) $f(5) = 3$ 이라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(3)) = f(4) = 1$

$\therefore f(2) = 5$

iii) $f(5) = 5$ 라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(5)) = f(5) = 1$ 이므로 모순이다.

$\therefore f(2) = 5$

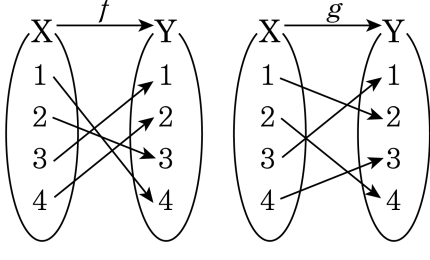
7. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

8. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
 역함수가 존재한다.
 $\therefore g \cdot f^{-1}$
 $= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
 $= h \cdot I = h$
 $\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
 $= g(f^{-1}(2))$
 $= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$
 $\therefore g(4) = 3$

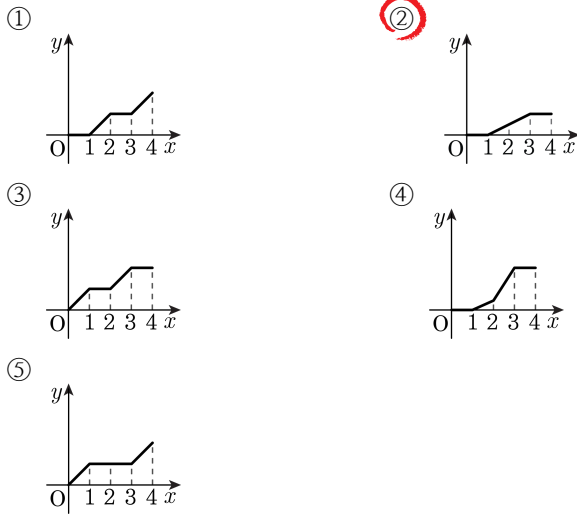
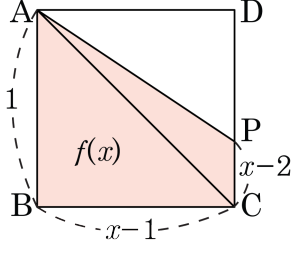
9. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?
- ① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

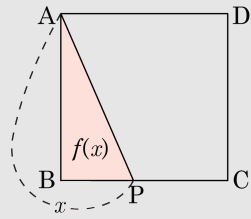
자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases} \text{이므로}$$
$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad \text{한편, 각 구간의 경계점에서}$$

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

11. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

12. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

$\vdots$

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

13. Z 는 정수 전체의 집합이고, 함수 $f : Z \rightarrow Z$ 가 $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(1) = 2$ 를 만족할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $f(0) = 0$

② $f(x) = -f(-x)$

③ $f(3x) = 3f(x)$

④ f 는 일대일함수이다.

⑤ 공역과 치역이 같다.

해설

- ① $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 에서
 $a = 0, b = 0$ 라고 하면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$
- ② $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 에서
 $a = x, b = -x$ 라고 하면
 $f(0) = f(x) + f(-x)$ 이고 ①에 의해
 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = -f(-x)$
- ③ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 에서
 $a = x, b = x$ 라고 하면
 $f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$
 $f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x)$
 $= 2f(x) + f(x) = 3f(x)$
(즉, $f(nx) = nf(x)$, n 은 정수)
- ④ $a \neq b$ 라고 하자.
 $f(a) - f(b) = f(a + (-b)) = f(a - b) = f((a - b) \times 1)$
 $= (a - b)f(1) = 2(a - b) \neq 0$
따라서 $f(a) \neq f(b)$ 이다.
즉, f 는 일대일 함수이다.
- ⑤ 공역 : Z (정수 전체의 집합)
치역 : $\{f(x) \mid x \in Z\} = \{xf(1) \mid x \in Z\}$
 $= \{2x \mid x \in Z\} \neq Z$

14. $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

- ① 4 ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대

응이므로

$A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야 한다.

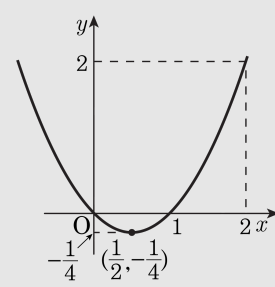
$f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로

$$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$$

$$\therefore a = 0, 2$$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$$\therefore a = 2$$



15. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x+3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

- ① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3=t$ 로 놓으면

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 일 때}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{ 일 때}\right) \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$$