

1. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B^c$ 은?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{2, 4\}$

해설

$A \cap B^c = A - B = \{2, 4\}$ 이다.

2. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합이 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}, C = \{3, 5, 6\}$ 일 때, $(A \cap B) \cap C^c$ 은?

① $\{2\}$

② $\{4\}$

③ $\{1, 2\}$

④ $\{2, 4\}$

⑤ $\{1, 2, 3\}$

해설

$(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) - C = \{2, 3\} - \{3, 5, 6\} = \{2\}$ 이다.

3. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 3개)

- ① $A = \emptyset$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.
- ② $B \subset A$ 이면 $n(B) < n(A)$ 이다.
- ③ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
- ④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.
- ⑤ $A = \{0\}$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.

해설

- ② $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$
- ④ 예를 들면 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ 이면 $n(A) = n(B) = 1$ 이지만 $A \neq B$
- ⑤ $A = \{0\}$ 이면 $n(A) = 1$

5. 집합 A 의 부분집합 중에서 원소 6, 7을 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 8개일 때, 집합 A 의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$8 = 2^3$$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$$n - 2 = 3, \quad n = 5, \quad n(A) = 5$$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$ 로 정의한다.
 $A = \{1, 2, 3, 4\}, A\Delta B = \{2, 3, 5, 8\}$ 이라고 할 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하면?

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

$A\Delta B$ 는 $(A\cup B) - (A\cap B)$ 이므로
 A 의 1, 4는 $A\cap B$ 의 원소들이다.
또한 5, 8은 B 의 원소들임을 알 수 있다.
 $\therefore B = \{1, 4, 5, 8\}$
 $\therefore 1 + 4 + 5 + 8 = 18$

7. 정의역이 $X = \{-1, 1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

① $f(x) = x$

② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = \frac{1}{x}$

④ $f(x) = x^3$

⑤ $f(x) = x|x|$

해설

$f(a) = a$ 가 항등함수의 정의이므로

①, ③, ④, ⑤ : $f(-1) = -1, f(1) = 1$

② : $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로

②는 항등함수가 될 수 없음

8. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = 2x + 5$

② $(f \circ g)(x) = 2x + 2$

③ $(f \circ g)(x) = x$

④ $(f \circ g)(x) = -x + 1$

⑤ $(f \circ g)(x) = 3x - 4$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$$

9. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

10. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$

11. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「 $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 ‘ $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다’의 대우인 ‘(가)이면 $x^2 + y^2 \neq 1$ 이다’가 참임을 증명하면 된다.
(가)에서 $x^2 + y^2 > 1$ 이므로 $x^2 + y^2 \neq 1$ 가 성립한다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1, 참
- ② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2, 참
- ③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2, 참
- ④ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$, 1, 거짓
- ⑤ $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$, 2, 거짓

해설

$x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
 x, y 가 모두 1보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

12. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여
적당한 실수 r 가 존재하여
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = (가) \cdots (B)$ 이므로
 $H = (나)$ 이다.
역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여
 $H = (나)$ 이면,
식 (B) 가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.
 (B) 에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$ 이라 놓으면
식 (A) 가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수 r 이 존재하여
식 (A) 가 성립하기 위한 $(다)$ 조건은
 $a \neq b$ 이고 $H = (나)$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- ① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 필요충분
- ② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b},$ 필요충분
- ③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 충분
- ④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b},$ 필요
- ⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b},$ 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$
 $H = b + \frac{b}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$
 $\therefore \frac{a-H}{a} = (가) \frac{H-b}{b}$
 $ab - bH = aH - ab$ 이므로 $H = (나) \frac{2ab}{a+b}$
따라서 (다) 필요충분조건

13. 3개의 양수를 원소로 갖는 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에 대하여 $B = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in A\}$, $C = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A, \beta \in A\}$ 를 만들었더니 $B = \{5, 7, 8\}$, $C = \{6, 10, 15\}$ 가 되었다. 이 때 집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 집합 A 는 소수로만 이루어진 집합이다.

㉡ 집합 A 의 원소 중 최소인 수는 3이다.

㉢ 집합 A 의 원소 중 최대인 수는 11이다.

㉣ 집합 A 의 원소들의 합은 19이다.

㉤ 집합 A 의 원소 중에는 짝수도 있다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢, ㉣

③ ㉠, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

A 는 3개의 양수를 원소로 갖는 집합이므로 일반성을 잃지 않고 세 수를 $0 < a < b < c$ 라 하자. 이 때, B 의 최소인 수는 $a + b$, 최대인 수는 $b + c$.

C 의 최소인 수는 ab , 최대인 수는 bc

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ bc = 15 \end{cases} \quad \dots \text{ ㉡}$$

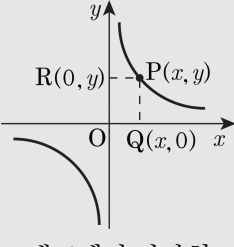
㉠에서 a, b 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 의 두 근이므로 $a = 2, b = 3$ ($\because a < b$)

㉡에서 b, c 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 의 두 근이므로 $b = 3, c = 5$ ($\because b < c$) $\therefore a = 2, b = 3, c = 5$

$\therefore A = \{2, 3, 5\}$ 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉤

14. 함수 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최소값은?
(단, $x > 0$, O는 원점)
- ① $6\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR의
 (가로의 길이 : x , 세로의 길이 : $y = \frac{6}{x}$)

둘레는 $2(x + y) = 2\left(x + \frac{6}{x}\right) \geq$

$2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ 둘레의 최소값 $= 4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR의
 (가로의 길이 : x 세로의 길이 : $y = \frac{6}{x}$)

$2(x + y)$ 의 최소값을 구하는 문제이다.
 $2(x + y) = k$ 라 놓고
 $y = \frac{6}{x}$ 의 관계식과 연립해서 푼다.

$k = 2\left(x + \frac{6}{x}\right)$

이 식을 x 에 대한 이차식으로 정리하면
 $kx = 2x^2 + 12, 2x^2 - kx + 12 = 0$
 두 근의 합, 곱 모두 양,
 실근을 가질 조건 ($D \geq 0$)을 이용
 $D = k^2 - 96 \geq 0$
 $\therefore k \geq \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \quad (\because k > 0)$

15. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다.
- ㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n) = n + 1$ 이다.
- ㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n + 1)$ 이다.

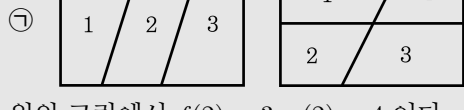
- ① ㉠

② ㉡

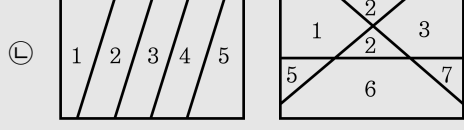
③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설



위의 그림에서 $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다. (참)



한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.
즉, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, \dots$ 이므로 $f(n) = n + 1$ (참)
㉢ [반례] $f(4) = 5, g(3) = 7$ 이므로 $g(3) > f(4)$ 이다.(거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.