1. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$ 에 대하여 $A\cap B^c$ 은?

① $\{1\}$　　② $\{2\}$　　③ $\{4\}$　　④ $\{1,2\}$　　⑤ $\{2,4\}$

해설

$A\cap B^c=A-B=\{2,4\}$ 이다.

2. 전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ 의 부분집합이 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{3,5,6\}$ 일 때, $(A \cap B) \cap C^c$ 은?

① $\{2\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{1,2\}$

④ $\{2,4\}$ ⑤ $\{1,2,3\}$

해설

$(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) - C = \{2,3\} - \{3,5,6\} = \{2\}$ 이다.

3. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 3개)

① $A = \varnothing$이면 $n(A) = 0$이다.

② $B \subset A$이면 $n(B) < n(A)$이다.

③ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$이면 $n(A) = n(B)$이다.

④ $n(A) = n(B)$이면 $A = B$이다.

⑤ $A = \{0\}$이면 $n(A) = 0$이다.

해설

② $B \subset A$이면 $n(B) \leq n(A)$

④ 예를 들면 $A = \{0\}$, $B = \{1\}$이면 $n(A) = n(B) = 1$이지만 $A \neq B$

⑤ $A = \{0\}$이면 $n(A) = 1$

5. 집합 A 의 부분집합 중에서 원소 $6, 7$ 을 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 8 개일 때, 집합 A 의 원소의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$8 = 2^3$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$n - 2 = 3, \quad n = 5, \quad n(A) = 5$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 3, 4\}, A \triangle B = \{2, 3, 5, 8\}$ 이라고 할 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하면?

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 20

해설

$A \triangle B$ 는 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로
A 의 1, 4 는 $A \cap B$ 의 원소들이다.
또한 5, 8 은 B 의 원소들임을 알 수 있다.
$\therefore\ B = \{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$
$\therefore\ 1 + 4 + 5 + 8 = 18$

7. 정의역이 $X=\{-1,1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

① $f(x)=x$ ② $f(x)=x^2$ ③ $f(x)=\frac{1}{x}$

④ $f(x)=x^3$ ⑤ $f(x)=x|x|$

해설

$f(a)=a$ 가 항등함수의 정의이므로

①, ③, ④, ⑤ : $f(-1)=-1,\ f(1)=1$

② : $f(-1)=f(1)=1$ 이므로

②는 항등함수가 될 수 없음

8. 두 함수 $f(x)=x+3,\ g(x)=2x-1$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=2x+5$

② $(f\circ g)(x)=2x+2$

③ $(f\circ g)(x)=x$

④ $(f\circ g)(x)=-x+1$

⑤ $(f\circ g)(x)=3x-4$

해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)+3=2x+2$

9. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 <u>않은</u> 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다. 원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다. 원소는 10 미만의 자연수이다.

① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.
원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 임을 알 수 있다.
① $\{x \mid x$는 7 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5\}$
② $\{x \mid x$는 7 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
③ $\{x \mid x$는 9 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
④ $\{x \mid x$는 9 이하의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
⑤ $\{x \mid x$는 10 미만의 소수$\} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

10. 두 집합 $A=\{5,\ 2a+1,\ 11\}$, $B=\{6-a,\ 3a-2,\ 13\}$에 대하여 $A\cap B=\{7\}$일 때, $B-A$는?

① $\{5,\ 7,\ 11\}$　② $\{3,\ 7,\ 13\}$　③ $\{5,\ 11\}$

④ $\{3,\ 13\}$　⑤ $\{7\}$

해설

$A-B=\{7\}$이므로 $7\in A$, $7\in B$이다.

$2a+1=7 \quad \therefore\ a=3$

$B=\{6-3,\ 3\times3-2,\ 13\}=\{3,\ 7,\ 13\}$

$B-A=\{3,\ 13\}$

11. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참
② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

12. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r}$, $H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 a, b에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

13. 3 개의 양수를 원소로 갖는 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 $B=\{\alpha+\beta \mid \alpha\in A,\ \beta\in A\}$, $C=\{\alpha\beta \mid \alpha\in A,\ \beta\in A\}$를 만들었더니 $B=\{5,\ 7,\ 8\}$, $C=\{6,\ 10,\ 15\}$가 되었다. 이 때 집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 집합 A 는 소수로만 이루어진 집합이다. ㉡ 집합 A 의 원소 중 최소인 수는 3 이다. ㉢ 집합 A 의 원소 중 최대인 수는 11 이다. ㉣ 집합 A 의 원소들의 합은 19 이다. ㉤ 집합 A 의 원소 중에는 짝수도 있다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢, ㉣　③ ㉠, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉤　⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

A 는 3개의 양수를 원소로 갖는 집합이므로 일반성을 잃지 않고 세 수를 $0<a<b<c$라 하자. 이 때, B의 최소인 수는 $a+b$, 최대인 수는 $b+c$.
C의 최소인 수는 ab, 최대인 수는 bc

$$\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \quad \cdots ①$$

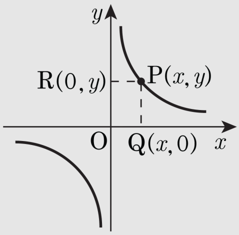
$$\begin{cases} b+c=8 \\ bc=15 \end{cases} \quad \cdots ②$$

①에서 $a,\ b$ 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2-5t+6=0$ 의 두 근이므로 $a=2,\ b=3$ $(\because\ a<b)$
②에서 $b,\ c$ 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2-8t+15=0$ 의 두 근이므로 $b=3,\ c=5$ $(\because\ b<c)$ $\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=5$
$\therefore\ A=\{2,\ 3,\ 5\}$ 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉤

14. 함수 $y=\frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최소값은? (단, $x>0$, O는 원점)

① $6\sqrt{2}$　　② $4\sqrt{6}$　　③ $2\sqrt{6}$　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR의

$\left(\text{가로의 길이} : x,\ \text{세로의 길이} : y=\frac{6}{x}\right)$

둘레는 $2(x+y)=2\left(x+\frac{6}{x}\right)\geq$

$2\cdot 2\sqrt{x\cdot\frac{6}{x}}=4\sqrt{6}$

$\therefore$ 둘레의 최소값$=4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR의

$\left(\text{가로의 길이} : x\text{세로의 길이} : y=\frac{6}{x}\right)$

$2(x+y)$의 최소값을 구하는 문제이다.

$2(x+y)=k$라 놓고

$y=\frac{6}{x}$의 관계식과 연립해서푼다.

$k=2\left(x+\frac{6}{x}\right)$

이 식을 x에 대한 이차식으로 정리하면

$kx=2x^2+12,\ 2x^2-kx+12=0$

두 근의 합, 곱 모두 양,

실근을 가질 조건 $(D\geq 0)$을 이용

$D=k^2-96\geq 0$

$\therefore k\geq\sqrt{96}=4\sqrt{6}\ \ (\because k>0)$

15. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

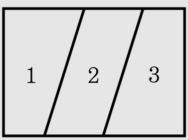
㉠ $f(2)=3,\ g(2)=4$ 이다.

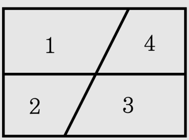
㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n)=n+1$ 이다.

㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \le f(n+1)$ 이다.

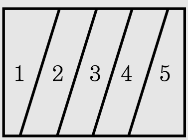
① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡　　④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

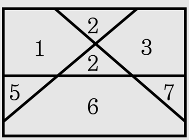
해설

㉠ 



위의 그림에서 $f(2)=3,\ g(2)=4$ 이다. (참)

㉡ 



한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나뉘어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.
즉, $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ \cdots$ 이므로 $f(n)=n+1$ (참)
㉢ [반례] $f(4)=5,\ g(3)=7$ 이므로 $g(3)>f(4)$ 이다.(거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.