

1. 집합 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset \in A$

② $\{1, 2\} \subset A$

③ $\{1, 2\} \in A$

④ $\emptyset \subset A$

⑤ $n(A) = 5$

해설

⑤ $n(A) = 4$

2. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

3. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때, $x + y$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$

② 3

③ $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$ 이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{13}$

4. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B = A$

② $(A \cup B) \subset A$

③ $B \cap A^C \neq \emptyset$

④ $A \subset B$

⑤ $A - (A \cap B) = \emptyset$

해설

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 30\},$$

$A = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B = \{12, 24\}$ 이다. 따라서 $B \subset A$ 이다.

따라서 ② $(A \cup B) \subset A$ 이다.

5. 다음 중 참인 명제는?

- ① 직사각형은 마름모이다.
- ② 평행사변형은 직사각형이다.
- ③ 사다리꼴이면 정사각형이다.
- ④ 정삼각형이면 이등변삼각형이다.
- ⑤ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90^\circ$ 이다.

해설

- ④ 이등변삼각형의 집합은 정삼각형의 집합을 포함하고 있으므로 참이다.

6. 두 실수 a, b 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건을 모두 고르면?

- ① $p : |a| + |b| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ② $p : a^2 + b^2 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ③ $p : a + b \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ④ $p : a^2 + b^2 + 2|ab| \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.
- ⑤ $p : a^3 + b^3 \neq 0, q : a, b$ 는 모두 0 이 아니다.

해설

$q \rightarrow p$ 이므로, $\sim p \rightarrow \sim q$ 인지 확인한다.
① $|a| + |b| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
② $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
③ $a + b = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 4, b = -4$
④ $a^2 + b^2 + 2|ab| = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 참
⑤ $a^3 + b^3 = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0 \rightarrow$ 거짓
반례 : $a = 3, b = -3$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 두 조건 p, q 는 $p : (A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ $q : [\quad]$ 이고, p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, $[\quad]$ 의 내용으로 알맞은 것은?

① $A = \emptyset$

② $A = B$

③ $A \subset B$

④ $B \subset A$

⑤ $B = \emptyset$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ 이 성립하려면, $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ 즉, $A = B$ 일 때이다.

8. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

9. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

㉠ $2 \in A$

㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$

$2 \in A$, $2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4 \in A$, $2^5 \in A$, $2^6 \in A, \dots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.

10. 집합 $A = \{(a, b) \mid a \times b = 9, a, b \text{는 자연수}\}$ 일 때, 집합 $n(A)$ 를
바르게 구한 것은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1 = 9$ 이므로 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$ 이다.
 $\therefore n(A) = 3$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

12. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 일 때, 집합 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$B = \{1, 3, 4\}$, $A^C \cap B = \{4\}$ 이므로 남은 원소는 2, 5 이므로 A 가 될 수 있는 모든 집합의 개수는 $2 \times 2 = 4(\text{개})$ 이다.

13. 전체집합이 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{는 정수}\}$ 이고, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $S \cap A^c = \emptyset$, $n(S \cap B) = 3$ 일 때, 집합 S 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$S \cap B$ 는 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 가 될 수 있다.
 $S \cap A^c = S - A = \emptyset$ 이므로, $S \subset A$

따라서 $S \cap B = \{1, 2, 3\}$ 인 경우, S 는 1, 2, 3을 원소로 갖고 4를 원소로 갖지 않는 A 의 부분집합이 되어 그 개수는 집합 $\{5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

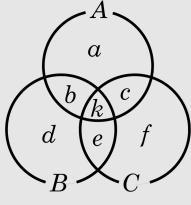
$S \cap B = \{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 인 경우도 같은 수만큼의 부분집합이 있으므로

S 의 개수는 $2^2 \times 4 = 16$ (개)이다.

14. 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\star$ 를 $X \star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 45, n(A \star B) = 18, n(B \star C) = 22, n(C \star A) = 24$ 를 만족할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하면?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설



$$\begin{aligned}
 n(A \cap B \cap C) &= k \\
 n(A \cup B \cup C) &= a + b + c + d + e + f + k \\
 &= 45 \dots \textcircled{㉠} \\
 n(A \star B) &= a + c + d + e = 18 \dots \textcircled{㉡} \\
 n(B \star C) &= b + d + c + f = 22 \dots \textcircled{㉢} \\
 n(C \star A) &= a + b + e + f = 24 \dots \textcircled{㉣} \\
 \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} + \textcircled{㉣} &= 2(a + b + c + d + e + f) = 64 \\
 \therefore a + b + c + d + e + f &= 32 \dots \textcircled{㉤} \\
 \textcircled{㉤} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } \therefore k &= 13
 \end{aligned}$$

15. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 를 $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ 인 두 집합 A , B 로 분할한다. 또 $f(A)$ 를 집합 A의 원소의 총합, $f(B)$ 를 집합 B의 원소의 총합이라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면 ?

① 5

② 10

③ 15

④ 25

⑤ 45

해설

$S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ 이므로, $f(A) + f(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\begin{aligned}\therefore f(A) \cdot f(B) &= f(A)(10 - f(A)) \\ &= -\{f(A)\}^2 + 10f(A) \\ &= -\{f(A) - 5\}^2 + 25\end{aligned}$$

$\therefore f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 25