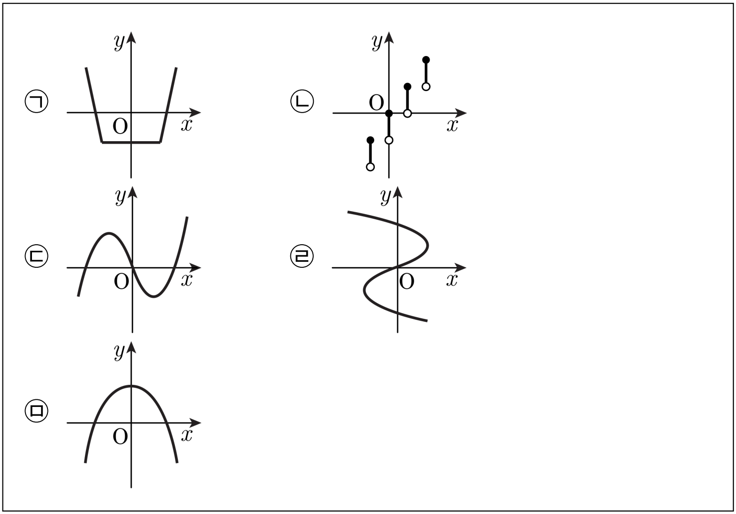
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉢, ㉤　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉤　　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
㉡ 함수가 아니다.
㉢ 함수
㉣ 함수가 아니다.
㉤ 함수
따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

해설

2. 다음 중 치역이 실수 전체의 집합인 것은 무엇인가?

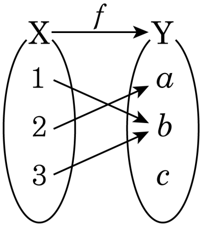
① $y = 2x$ ② $y = -x^2$ ③ $y = x^2 - 2$

④ $y = -x^2 + 2x$ ⑤ $y = 3$

해설

②$y \leq 0$ ③$y \geq -2$ ④$y \leq 1$ ⑤$y = 3$

3. 아래 그림은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f : X \to Y$를 나타낸 것이다. f의 정의역, 공역, 치역을 순서대로 나열한 것은?



① $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$
② $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$
③ $\{1, 2, 3\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b\}$
④ $\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$
⑤ $\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}$

해설

4. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$

② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$

④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a\,|+|b\,|$

이 때 $|a+b|\leq|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

5. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$이므로

$2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$에서

$3x^2 - 12x - 15 = 0,\ 3(x^2 - 4x - 5) = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = 5,\ -1$

즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$일 때 $f(x) = g(x)$이다.

$\therefore\ X = \{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

6. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

ㄱ $f : x \rightarrow |x|^2$

ㄴ $g : x \rightarrow x + 2$

ㄷ $h : x \rightarrow |x| + 1$

ㄹ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

ㅁ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

ㄱ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

ㄴ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

ㄷ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

ㄹ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

ㅁ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㄹ, ㅁ은 함수가 될 수 없고 ㄱ, ㄴ, ㄷ 3개 만 함수가 될 수 있다.

7. 함수 f가 임의의 양수 m, n에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(2^{2006})$의 값은 얼마인가?

① 1003 ② 2006 ③ 4012 ④ 2^{1003} ⑤ 2^{2006}

해설

$$\begin{aligned} f(2^{2006}) &= f(2\times 2\times\cdots\times 2) \\ &= f(2)+f(2)+\cdots+f(2) \\ &= 2006f(2) = 2006 \end{aligned}$$

8. 집합 $X=\{1,\ 2\}$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2+x+a$, $g(x)=x^2+bx+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

정의역 $X=\{1,\ 2\}$이고 $f=g$이므로

$f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$가 성립한다.

$f(1)=g(1)$에서 $2+1+a=1+b+1$

$\therefore\ a-b=-1 \quad \cdots ㉠$

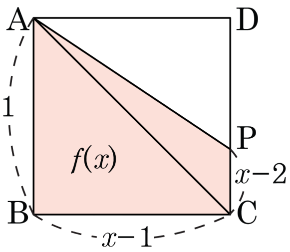
$f(2)=g(2)$에서 $8+2+a=4+2b+1$

$\therefore\ a-2b=-5 \quad \cdots ㉡$

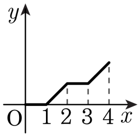
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=4$

$\therefore\ a+b=7$

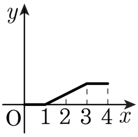
9. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



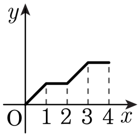
①



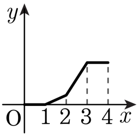
②



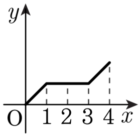
③



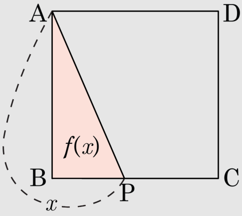
④



⑤



해설

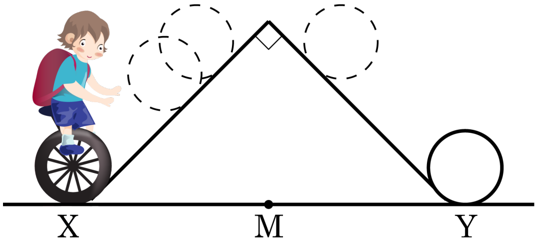


x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

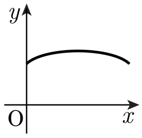
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

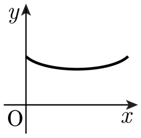
10. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)



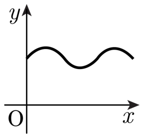
①



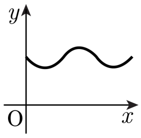
②



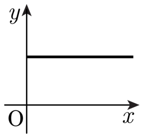
③



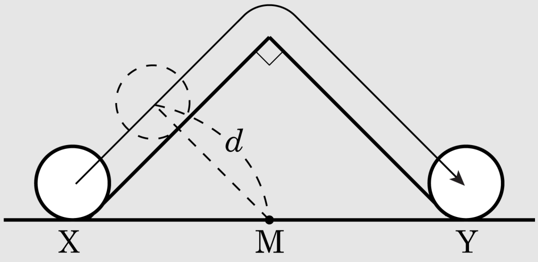
④



⑤



해설



따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는