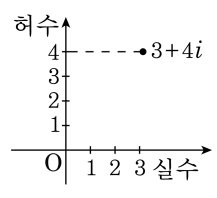
1. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



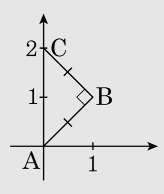
① 정삼각형　　② 이등변삼각형

③ 직각삼각형　　④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1 + i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

2. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore\ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y < x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

3. $f(x)=x^{61}+x^{47}+1$ 이라고 할 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)=f(-i)=(-i)^{61}+(-i)^{47}+1=1$

$f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=i^{61}+i^{47}+1=1$

4. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$

$(\overline{x+yi}) = \dfrac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$

$x+yi = 1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

5. 0 이 아닌 실수 a 가 등식 $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+5}{a}}$ 를 만족할 때, $|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2a-5$　　② 5　　③ $2a+5$

④ -5　　⑤ $2a$

해설

$a+5 \geq 0,\ a<0$, $-5 \leq a < 0$

$|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2} = -(a) + (a+5) = 5$

6. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k < 0$　　② $k > 0$　　③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \le 0$　　⑤ $k \ge 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이

허근을 가져야 하므로

x에 대한 내림차순으로 정리하면

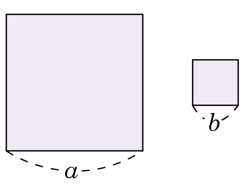
$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$

$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$

$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$

$\therefore k > 0$

8. 길이가 16인 철사로 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 a, b인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 10이다. 이 때, a, b를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구하면? (단, x^2의 계수는 1이다.)



① $x^2 - 4x + 3 = 0$　② $x^2 - 3x + 4 = 0$
③ $x^2 + 3x - 4 = 0$　④ $x^2 + 4x + 2 = 0$
⑤ $x^2 - 2x - 2 = 0$

해설

두 정사각형의 둘레의 합이 16이므로
$4(a + b) = 16$에서 $a + b = 4$
두 정사각형의 넓이의 합이 10이므로
$a^2 + b^2 = 10$,
$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 = 16 - 2ab = 10$
따라서 $2ab = 6$이고 $ab = 3$
따라서 a, b를 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합이 4, 곱이 3이므로 $x^2 - 4x + 3 = 0$

9. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 상수 k의 범위는?

① $k \le -1,\ k \ge 2$
② $k \le -1$
③ $2 \le k < 3$
④ $1 < k < 3$
⑤ $k \le -1,\ 2 \le k < 3$

해설

㉠ 두 근이 실수가 되어야 하므로 $\frac{D}{4} \ge 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (3-k) = k^2 - k - 2 \ge 0$

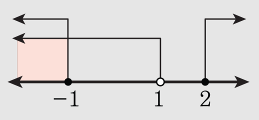
$(k-2)(k+1) \ge 0$

$\therefore\ k \le -1, k \ge 2 \cdots$ ㉮

㉡ 둘 다 양수이려면 합 > 0 이고, 곱 > 0

$-2(k-1) > 0,\ 3-k > 0 \cdots$ ㉯

$\therefore\ k < 1$

$\Rightarrow$ 

$\therefore\ k \le -1$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$
$y = x + 1 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

11. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$
$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$
$x=1$ 일 때, $m=6$
$x=3$ 일 때, $M=18$
$\therefore\ M-m=12$

12. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면

$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=6$

(ⅰ) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서

$x^2+x-2=0$,

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

(ⅱ) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서

$x^2+x-6=0$,

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

13. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$의 실근이 1뿐일 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a>-\frac{3}{4}$　　② $a>-\frac{3}{2}$　　③ $a>-1$

④ $a>0$　　⑤ $a>1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$의 근이 허근이거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(i) 허근을 가질 경우

$D=1-4(a+1)<0$, $-3<4a$

$\therefore\ a>-\frac{3}{4}$

(ii) $x=1$을 중근으로 가질 경우

$D=1-4(a+1)=0$이고 $1+1+a+1=0$을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a>-\frac{3}{4}$

14. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$
$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$
세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$
$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

15. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\beta + \left(1 - \sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

16. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω라 할 때, 다음 중 틀린 것은?

① $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega^3=1$

③ 1의 세제곱근은 $1,\ \omega,\ \omega^2$으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2=\overline{\omega}$(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega=-\omega^2$

해설

$x^3=1\Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\quad \omega^2+\omega+1=0,\quad \omega^3=1\cdots$①,②

$x=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면 $\cdots$③

$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}\cdots$④

$\omega=-1-\omega^2\cdots$⑤(거짓)

17. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0　　② 15　　③ 10　　④ -10　　⑤ -15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$에 $3x^2 + y = 6$ 대입.
$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$
$x = \pm 1,\ \pm 2$
x의 합 : $+1 - 1 + 2 - 2 = 0$

18. 부등식 $bx+(a-b)<0$의 해가 $x>2$일 때, 부등식 $ax+2a-b>0$의 해를 구하면?

① $x>-1$　② $x<-1$　③ $x>-2$
④ $x<-2$　⑤ $x>-3$

해설
$bx+(a-b)<0$의 해가 $x>2$이려면
$b<0$ …… ㉠
$\frac{b-a}{b}=2$ …… ㉡
㉡에서 $b-a=2b$ ∴ $a=-b$
㉠에서 $b<0$이므로 $a>0$
$ax+2a-b>0$에서 $ax+2a+a>0$ ∴ $ax>-3a$
$a>0$ 이므로 $x>-3$

19. 부등식 $|x+1| < 1 + |2-x|$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < 1$

해설

$|x+1| < 1 + |2-x|$ 에서

ⅰ) $x < -1$일 때,

$-(x+1) < 1 + (2-x)$

$\therefore -1 < 3$이므로 성립

$\therefore\ x < -1$

ⅱ) $-1 \le x < 2$일 때,

$x + 1 < 1 + 2 - x$

$\therefore\ 2x < 2$

$\therefore\ x < 1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1 \le x < 1$

ⅲ) $x \ge 2$ 일 때,

$x + 1 < 1 - (2-x)$

$\therefore\ 1 < -1$ 이므로 모순

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 구하는 부등식의 해는 $x < 1$

20. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$을 풀면?

① $-5 < x < 5$　② $-5 < x < 0$　③ $-5 < x < 1$
④ $-1 < x < 5$　⑤ $-1 < x < 6$

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로
$x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x-5)(x+1) < 0$
$-1 < x < 5$
이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$
(ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 4x - 5 < 0$, $(x+5)(x-1) < 0$
$-5 < x < 1$
이 때 $x < 0$과 공통 범위는 $-5 < x < 0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5 < x < 5$