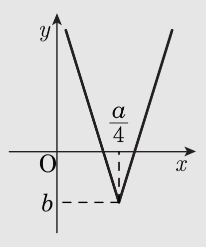
1. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

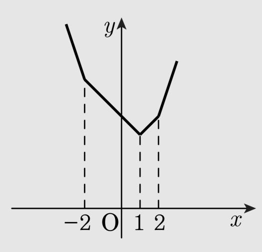
$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \qquad \therefore\ a + b = 10$

2. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P 의 좌표를 P(x) 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$
$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P 의 좌표는 P(1) 이다.



3. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\dfrac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots①$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

4. 등식 $\frac{3x}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ 가 x에 관한 항등식일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -6 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\frac{3x}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$

$=\frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{x^3+1}$

$=\frac{ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c}{x^3+1}$

$=\frac{(a+b)x^2+(b-a+c)x+a+c}{x^3+1}$

$a+b=0,\ b-a+c=3,\ a+c=0$을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=1$

5. 분수식 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{2}-1$　　③ $\sqrt{2}+1$

④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 1

해설

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-1} = -1$$

$$\therefore (\text{준 식}) = \frac{1}{\sqrt{2}-(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

6. $x-y<0$, $xy<0$일 때, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$를 간단히 하면?

① $2x$　　② $2y$　　③ $-2x$
④ $-2y$　　⑤ $2x-2y$

해설

$x-y<0,\ xy<0 \Rightarrow x<0,\ y>0$
$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$
$=\sqrt{(x-y)^2}+|x|-|y|$
$=|x-y|+|x|-|y|$
$=-(x-y)-x-y=-2x$

7. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{12+c}{3+2}$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$f(1) = \dfrac{-3}{3} = -1$

8. 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$B = \{(x, y) \mid y = ax\}$$

① $a < 0$　　② $a > 0$　　③ $0 < a < 1$
④ $0 \leq a \leq 1$　　⑤ $a < 0, a > 1$

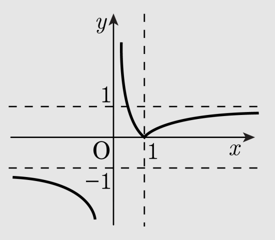
해설

$y = \dfrac{|x-1|}{x}$에서

$x \geq 1$일 때,

$y = \dfrac{x-1}{x} = -\dfrac{1}{x} + 1$

$x < 1$일 때, $y = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$



$A \cap B = \varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y = ax$가 만나지 않아야 하므로 ,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 0$

9. $1 \le x \le a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. $a+m$ 의 값을 구하여라.

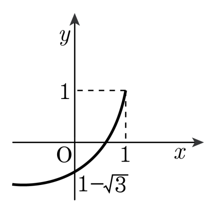
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \le x \le a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$ 은 증가함수이므로
$x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

10. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1 = -\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3} = -\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a = -3$
$\therefore\ y = -\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c = (-3)+3+1 = 1$

11. 두 집합 $\mathrm{A} = \{(x,\ y) \mid y = \sqrt{2x-1}\}$, $\mathrm{B} = \{(x,\ y) \mid y = mx+1\}$에서 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$일 때, m의 값의 범위를 구하면?

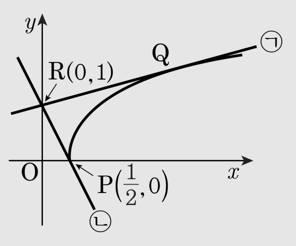
① $-2 \le m \le \sqrt{2}$　　② $-1 \le m \le \sqrt{2}-1$

③ $-2 \le m \le \sqrt{2}-1$　　④ $-2 \le m \le \sqrt{3}-1$

⑤ $-1 \le m \le \sqrt{3}-1$

해설

그림에서 직선 ㉡이 점 P를 지날 때부터 ㉠과 점 Q에서 접할 때까지의 m의 값이 구하는 범위이다.



(i) P $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때, $m = -2$

(ii) 접할 때는 $\sqrt{2x-1} = mx+1$에서

$m^2x^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$

$\therefore\ \frac{D}{4} = (m-1)^2 - 2m^2 = 0$

$\therefore\ m = -1 + \sqrt{2}\ (\because\ m > 0)$

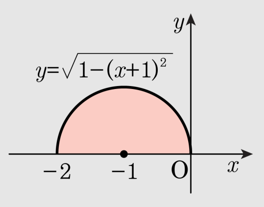
(i), (ii)에서 $-2 \le m \le \sqrt{2}-1$

12. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서
$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x | -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을
제곱하여 정리하면 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 이므로
함수의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



13. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 $3:4$ 이고, 합격자의 수의 비는 $5:6$, 불합격자의 수의 비는 $5:8$ 이다. 이 대학의 수학과의 경쟁률을 구하면?

① $10:3$　② $5:3$　③ $4:1$　④ $5:2$　⑤ $4:3$

해설

영문과 합격자 수를 5α 라 하면,
수학과 합격자 수는 6α
영문과 불합격자 수를 5β 라 하면,
수학과 합격자 수는 8β
$\therefore\ (5\alpha+5\beta):(6\alpha+8\beta)=3:4$
$\Rightarrow\ 18\alpha+24\beta=20\alpha+20\beta$
$\therefore\ \alpha=2\beta$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha+8\beta}{6\alpha} = \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow\ 5:3$

14. $0 < a < 1$이고, $x = \frac{1+a^2}{a}$일 때, $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$의 값을 구하면?

① a^2　② a　③ $\frac{1}{a}$　④ $a-1$　⑤ $a+1$

해설

$$x+2 = \frac{1+a^2}{a} + 2 = \frac{1}{a}(a+1)^2$$

$$\therefore \sqrt{x+2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$$x-2 = \frac{1+a^2}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a}$$

$$\therefore \sqrt{x-2} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a}} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1-a}{\sqrt{a}}}{\frac{a+1}{\sqrt{a}} - \frac{1-a}{\sqrt{a}}}$$

$$= \frac{(a+1)+(1-a)}{(a+1)-(1-a)} = \frac{1}{a}$$

15. 함수 $y=\dfrac{1}{x+2}+2$의 그래프가 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 대칭이 될 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

점근선의 교점이 $(-2,\ 2)$이므로
두 직선 $y=ax+b$와 $y=cx+d$에 대하여
대칭이 되려면 $a=1,\ c=-1$
따라서 $y-2=x+2$ 또는 $y-2=-(x+2)$
$\therefore\ y=x+4$ 또는 $y=-x$
$\therefore\ b=4,\ d=0$
$\therefore\ a+b+c+d=4$