

1. 세 점 $(0, 2)$, $(3, 8)$, $(a, 3a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

세 점 $A(0, 2)$, $B(3, 8)$, $C(a, 3a)$ 로 놓으면

직선 AB의 기울기 : $\frac{8-2}{3-0} = 2$

직선 BC의 기울기 : $\frac{3a-8}{a-3}$

한편, 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로

직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같다.

$$\frac{3a-8}{a-3} = 2, \quad 3a-8 = 2a-6$$

$$\therefore a = 2$$

2. 점 $(2, -4)$ 를 지나고 직선 $x - 2y - 4 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 1$

② $y = -2x + 1$

③ $y = -x + 2$

④ $y = x - 2$

⑤ $y = -2x$

해설

$$2y = x - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

따라서 구하는 직선의 방정식의

기울기는 -2 이고 점 $(2, -4)$ 를 지나므로

$$y + 4 = -2(x - 2), y = -2x$$

3. 두 원 $(x-2)^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 + y - 5 = 0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$(x-2)^2 + y^2 = 10$ 에서
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4x - 6 - (x^2 + y^2 + y - 5) = 0$
 $4x + y + 1 = 0, y = -4x - 1$
 $\therefore a = -4, b = -1$
 $\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$

4. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

5. 두 점 A(1),B(5)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3 + 1} = 4$$

∴ P(4)

$$\frac{3 \times 5 - 1 \times 1}{3 - 1} = 7$$

∴ Q(7)

$$\therefore PQ = |7 - 4| = 3$$

6. 좌표평면 위의 점 A(3, -2), B(4, 5), C(-1, 3)을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 (x, y)라 할 때 $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면
$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$
$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D의 좌표는 (-2, -4)

7. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

- ① $-2 < m < 2$ ② $-2 < m < 3$ ③ $-1 < m < 2$
④ $1 < m < 4$ ⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \dots \textcircled{1}$ 에서
 $m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로
위의 직선은 m 의 값에 관계없이
점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고
 $(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로
따라서 $1 < m < 4$

8. 원점에서의 거리가 1 이고, 점 (1, 2)를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

점 (1, 2)를 지나는 직선은
 $y = m(x - 1) + 2$ 에서,
 $mx - y - m + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$
여기서 (0, 0)에 이르는 거리가 1 이므로
 $\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, |m - 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$
 $3x - 4y + 5 = 0$
 $\therefore a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

9. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

10. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$

② $k > -5$

③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$

⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k+5$$

이 때, $k+5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

11. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은 $x = 0$ 으로부터

$$y^2 + 2by + c = 0$$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

12. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

13. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm ② 10 cm ③ 11 cm ④ 12 cm ⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는

13 cm 이다.

공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$

14. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

- ㉠ $y = -3x - 2$ ㉡ $y = 3x + 2$ ㉢ $y = -3x + 2$
㉣ $y = -3x + 4$ ㉤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은

$$y - (-2) = -3x$$

$$\therefore y = -3x - 2$$

15. 점 $(2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 $(2, 3)$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

해설

점 $(2, 3)$ 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2, -3)$
이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6 만큼 평행이동 시킨 것과 같다
 $\therefore m + n = -4 - 6 = -10$

16. 부등식 $y \leq -x^2 + 4$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 3 개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$ 의 경계를 포함한
아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $P(x, y)$ 중 x, y 가 모두 양의
정수인 것은

(i) $x = 1$ 일 때

$y \leq -1^2 + 4 = 3$ 이므로 $y = 1, 2, 3$

(ii) $x = 2$ 일 때

$$y \leq -2^2 + 4 = 0$$

즉, 양의 정수 y 는 존재하지 않는다.

따라서 x, y 가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 의 3개이다.

17. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

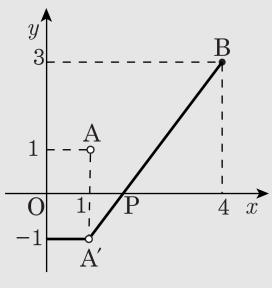
- ① 5 ② $2\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 A (1, 1)을 x축에 대해 대칭이동시킨 A'(1, -1)과 B (4, 3)을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이므로

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$



18. x 축 및 y 축에 접하고 원 $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 4$ 에는 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 25

② 27

③ 30

④ 32

⑤ 35

해설

조건을 만족시키는 원은 제 1사분면에

존재하므로, 원의 반지름을 a 라 하면

중심의 좌표는 (a, a) 가 된다.

주어진 원과 외접하기 위해서는 중심거리가

반지름의 합과 같아야 하므로

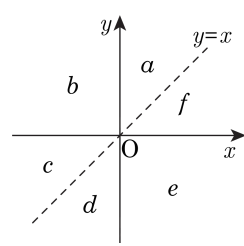
$$\sqrt{(7-a)^2 + (6-a)^2} = a + 2$$

$$\therefore a^2 - 30a + 81 = 0$$

$$\therefore (\text{두 근의 합}) = 30$$

19. 다음 그래프에서 $\frac{y}{x} < 1$ 의 영역을 나타내는
부분을 모두 구하면?

- ① d, e, f ② b, c, e
③ a, d, f ④ a, b, d, e
⑤ b, c, e, f



해설

(i) $x > 0$ 일 때, $\frac{y}{x} < 1 \therefore y < x$
 $\therefore$ 그래프에서 e, f
(ii) $x < 0$ 일 때, $\frac{y}{x} < 1 \therefore y > x$
 $\therefore$ 그래프에서 b, c
따라서 (i), (ii)에서 b, c, e, f 이다.

20. 포물선 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ 의 꼭짓점이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 의 내부에 있기 위한 상수 k 의 값의 범위가 $a < k < b$ 일 때, 두 실수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ 에서 $y = (x - k)^2 + 1$

즉, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(k, 1)$ 이다.

또한, $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 에서

$(x + 1)^2 + y^2 = 2$

점 $(k, 1)$ 이 원 $(x + 1)^2 + y^2 = 2$ 의 내부에 있으면 부등식

$(x + 1)^2 + y^2 < 2$ 의 영역에 속하므로

$(k + 1)^2 + 1^2 < 2, k^2 + 2k < 0, k(k + 2) < 0$

$\therefore -2 < k < 0$

따라서, $a = -2, b = 0$ 이므로 $a - b = -2$