1. $n(\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}) + n(\{1,\ 3,\ 9\}) + n(\{\varnothing\})$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$n(\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}) + n(\{1,\ 3,\ 9\}) + n(\{\varnothing\})$
$= 5 + 3 + 1 = 9$

2. 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 의 부분집합 중에서 a 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\{b,\ c,\ d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
즉, $2^3 = 8$

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고, $A = \{x | x$는 28의 약수$\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 이고, $n(A) = 6$, $n(B) = 6$ 이다.
따라서, $n(A) + n(B) = 12$ 이다.

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 <보기> 중 서로소인 집합끼리 짝지어진 것은?

보기

㉠ $A^c \cap B, B^c \cap A$　　㉡ $A \cup B, A \cup B^c$

㉢ $A, A^c - B$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $A^c \cap B = B - A, B^c \cap A = A - B$ 이므로 각각을 벤 다이어그램으로 나타내면 그림1에서 $(A^c \cap B) \cap (B^c \cap A) = \varnothing$
따라서 $A^c \cap B$와$B^c \cap A$ 는 서로소이다.

㉡ 그림2에서 $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
즉, $A \cup B$와$A \cup B^c$ 은 서로소가 아니다.

㉢ 그림3에서 $A \cap (A^c - B) = \varnothing$
따라서 A와$A^c - B$ 는 서로소이다.

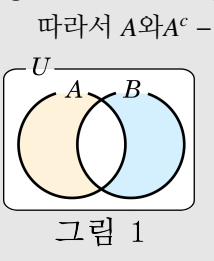


그림 1

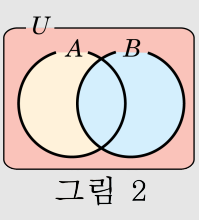


그림 2

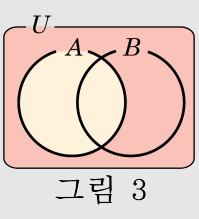


그림 3

5. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \times B$ 를 $A \times B = \{(a,\ b) | a \in A,\ b \in B\}$ 라고 정의한다.
$n(A \cup B) = 8,\ n(A \cap B) = 4$ 일 때, $n(A) \times n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$\therefore n(A) + n(B) = 12$
따라서 A, B 의 원소의 개수는 각각 최대 6 개씩 들어가야 한다.
따라서, $n(A) \times n(B)$ 의 최댓값은 $6 \times 6 = 36$ 이다.

6. 전체집합 $U = \{a, e, i, o, u\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, e, u\}$, $B = \{e, i\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $A^c = \{i, o, u\}$	㉡ $A - B = \{a, u\}$
㉢ $A - B^c = \{a, i, u\}$	㉣ $B^c - A = \{a, i, u\}$
㉤ $B - A = \{i\}$	㉥ $B^c = \{a, i, o, u\}$

▶ 답 :

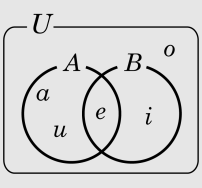
▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉤

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



㉠ $A^c = \{i, o\}$
㉡ $A - B = \{a, u\}$
㉢ $A - B^c = \{e\}$
㉣ $B^c - A = \{o\}$
㉤ $B - A = \{i\}$
㉥ $B^c = \{a, o, u\}$

7. 집합 $A = \{x|x$는 10 이하의 3의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$, $B - A = \{1,\ 2,\ 4\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

$A = \{3, 6, 9\}$, $n(A \cap B) = 3$ 이므로

$A \cap B = A$

$\therefore A \subset B$

$\therefore B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

그러므로 원소의 개수는 6 개이다.

8. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 7, 9\}, B = \{3, 9\}$ 에 대하여
$B \cup X = X, (A - B) \cap X = \{7\}$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.
(단, X 는 U 의 부분집합이다.)

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\{3, 9\} \cup X = X, \{1,\ 7\} \cap X = \{7\}$ 이므로
$\{3, 9\} \subset X, 1 \notin X, 7 \in X$ 이다. 따라서 $\{3, 7, 9\} \subset X \subset \{3, 5, 7, 9\}$ 이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^1 = 2$(개) 이다.

9. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 성립하는 것은?

① $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

② $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $A^c\cup(B\cap C)^c=U-(A\cup B\cup C)$

④ $A\cup(A\cap B)^c=\varnothing$

⑤ $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=B$

해설

① $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^c$
$=A\cap(B^c\cap C^c)$
$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)$
$=(A-B)\cap(A-C)$

② $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $A^c\cup(B\cap C)^c=A^c\cup(B^c\cup C^c)$
$=A^c\cup B^c\cup C^c$
$=(A\cap B\cap C)^c$
$=U-(A\cap B\cap C)$

④ $A\cup(A\cap B)^c=A\cup(A^c\cup B^c)$
$=(A\cup A^c)\cup B^c$
$=U\cup B^c=U$

⑤ $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup(B\cap B^c)$
$=A\cup\varnothing=A$

10. 전체 60 명의 학생 중 우산을 가져온 학생 35 명, 비옷을 가져온 학생 20 명, 둘 다 가져온 학생이 12 명이다. 우산과 비옷 중 하나만 가져온 학생의 수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 명

▷ 정답 : 31 명

해설

$n(U) = 60, n(A) = 35, n(B) = 20, n(A \cap B) = 12$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 35 + 20 - 12 = 43$ 이다.

$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 43 - 12 = 31$ 이다.

11. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$)
q : $x<-3$ 또는 $x>1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \le \beta$ 라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

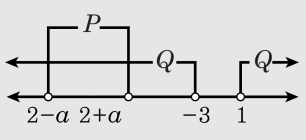
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$ $P=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \le -3$ ⋯ ㉠ 또는 $2-a \ge 1$ ⋯ ㉡,

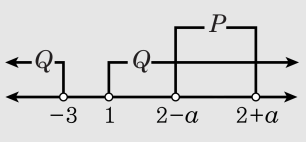
즉, $a \le -5$ 또는 $a \le 1$

그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0<a \le 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore$ $\alpha=0$, $\beta=1$

$\therefore$ $\alpha+\beta=1$

12. 전체집합 U 의 세 부분집합 $P,\ Q,\ R$ 는 각각 세 조건 $p,\ q,\ r$ 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \to q$, $r \to \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　　② $Q \subset R$　　③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$　　⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \to q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \to \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \to q$ 와 $r \to \sim q$ 의 대우인 $q \to \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \to \sim r$ 가 참이다.

$\therefore\ P^c \subset R^c$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

13. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$　　② $1 \le a \le 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$　　④ $a \le 1$ 또는 $a \ge 2$

⑤ $a > 0$

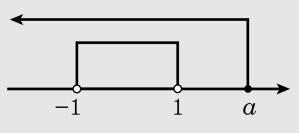
해설

$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \le a\}$

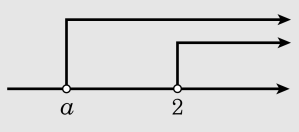
$\therefore a \ge 1 \cdots$ ㉠



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$

$\therefore a \le 2 \cdots$ ㉡



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \le a \le 2$

14. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$
② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$
③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$
④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$
⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1$ 따라서 $2^{60} < 3^{40}$

$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1$ 따라서 $3^{40} < 5^{30}$

$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

15. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=2+ab+\frac{1}{ab}$

산술기하평균의 관계에 의해

$ab+\frac{1}{ab}\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=2$

$\therefore\ 2+ab+\frac{1}{ab}$ 의 최솟값은 4

16. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

17. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$a,\ b$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(1^2+1^1) \geq (a+b)^2$ 에서
$2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \leq \frac{2(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

따라서 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

18. $x^2 \neq 1$이고, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때, $f(-x)$를 $f(x)$를 사용해서 나타내면 무엇인지 고르면?

① $f(x)$　　② $-f(x)$　　③ $\{f(x)\}^2$

④ $\dfrac{1}{f(x)}$　　⑤ $2f(x)$

해설

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

19. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에
$x = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$와 함수 $g : Y \to Z$가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a　　② b　　③ c

④ b, c　　⑤ a, b, c

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$이어야 한다.
(i) $f(2) = b$인 경우 $f(1) = a$이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$인 경우 $g(c) = 6$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
$(g \circ f)(2) = 4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g \circ f$도 일대일대응이다.
$(g \circ f)(2) = 4$에서
$g(f(2)) = 4$이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2) = b$이어야 한다.
$\therefore f(3) = c$

21. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일 대응의 개수는 (가) 이고, 항등함수의 개수는 (나) 이며 상수함수의 개수는 (다) 이다. 이때, (가) ~ (다) 에 알맞은 수를 순서대로 적은 것은?

① 6, 3, 3　　② 6, 3, 1　　③ 6, 1, 3

④ 27, 3, 1　　⑤ 27, 1, 3

해설

(i) 일대일 대응 $f : X \rightarrow X$ 라 하면
$f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-1,\ 0,\ 1$ 중 하나이므로 3개
$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$ 의 값을 제외한 2개
$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 1개이다.
따라서, 일대일 대응의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
(ii) 항등함수 $f(-1) = -1, f(0) = 0,\ f(1) = 1$의 1개
(iii) 상수함수 : $x \in X$ 일 때
$f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$의 3개
따라서, (가), (나), (다) 에 알맞은 수는 차례로 6, 1, 3이다.

22. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots,\ a\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $a-4,\ a-2,\ a$ 를 동시에 포함하는 부분집합의 개수가 64 개일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$64 = 2^6$

집합 A 의 원소의 개수가 n 개라면,

$n-3 = 6,\quad n = 9,\quad n(A) = 9$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$

$\therefore\ a = 17$

23. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$이면 $A \cap B = A$이다.

② $A \subset B$이면 $A^c \subset B^c$이다.

③ $B - A = A^c \cap B$

④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$이면 $A^c \supset B^c$이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

24. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1+a>\sqrt{1+2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
Ⅲ. $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$
Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\right)\geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 25$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2-(\sqrt{1+2a})^2$
$=a^2>0\ (\because a>0)$
$\therefore (1+a)>\sqrt{1+2a}$ (○)
Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (○)
Ⅲ. $a+\dfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$ (○)
Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\dfrac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
$=\dfrac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\leq 0$
$\therefore \dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$ (○)
Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\right)=4+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}$
$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\times\dfrac{2b}{a}}=4$
$\therefore 4+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}\geq 8$ (×)
Ⅵ $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=17+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}$
$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\times\dfrac{8b}{a}}=8$
$\therefore (2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=17+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\geq 25$ (○)

25. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개　② 18 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)
그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x) \neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)