

1. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $p = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

2. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

- ① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$
④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$
 $B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$
 $C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$
 $C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로
 $\therefore C < A < B$

4. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$ 로 계산할 때, $10^a = 275$ 를 만족하는 a 의 값은?

① 2.34 ② 2.38 ③ 2.42 ④ 2.46 ⑤ 2.50

해설

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69} \text{ 이므로}$$

$$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$$

$$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$$

$$\therefore a = 2.42$$

5. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} 8^x + \frac{1}{8^x} &= (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 \\ &= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

6. $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

- ① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$$x^2 + x^{-2} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 \text{에서}$$

$$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + x^{-1} > 0 \text{이므로 } x + x^{-1} = 3$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 \text{에서}$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$$

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$$

7. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

8. $9^x = 2$ 일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ 16 ④ 64 ⑤ 256

해설

$$\begin{aligned} 9^x &= 2 \text{ 이므로 } 3^{2x} = 2 \text{ 이다.} \\ (\text{주어진 식}) &= (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} \\ &= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

9. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2 + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log_{10} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \\ &= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \log_{10} 100 = 2 \end{aligned}$$

10. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\log_a 27 = -2 \text{에서 } a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 3 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

11. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

12. $\log_5 250 = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 라고 할 때, $n \times 25^\alpha$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로

$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$

$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고

소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$

따라서 $25^\alpha = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^α 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

13. $2^a = 20^b = 10^{10}$ 일 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $-\frac{1}{6}$

④ $-\frac{1}{8}$

⑤ $-\frac{1}{10}$

해설

$$a = \frac{10}{\log 2}, \quad b = \frac{10}{1 + \log_2}$$

$$\therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\log 2}{10} - \frac{1 + \log 2}{10} = -\frac{1}{10}$$

14. 1보다 큰 정수 a, b, c 에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$ 일 때, $\log_c p$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 식에서 $\log_p a = \frac{1}{12}$, $\log_p b = \frac{1}{4}$, $\log_p abc = \frac{1}{2}$

$\log_c p = x$ 라 하면 $\log_p c = \frac{1}{x}$ 이고,

$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c$ 이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\therefore \log_c p = 6$$

15. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면
 $\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$
 $(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$
 $a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$
 $a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$
 $(a+10b)(a-12b) = 0$
 $\therefore a = -10b$ 또는 $a = 12b$
이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로
 $a > 0$, $b > 0$
따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

16. 이차방정식 $2x^2 - 8x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 일 때, $\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2$ 의 값은?

- ① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4$, $\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_\alpha 2 + \log_\beta 2 &= \frac{1}{\log_2 \alpha} + \frac{1}{\log_2 \beta} \\ &= \frac{\log_2 \alpha + \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \cdot \log_2 \beta} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8\end{aligned}$$

$\log_2 \alpha\beta = 4$ 이므로 $\alpha\beta = 2^4$

$$\therefore \log_{\alpha\beta} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \log_\alpha 2 + \log_\beta 2 + \log_{\alpha\beta} 2 = 8 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$$

17. $\log \frac{x}{4.71} = 1.9812$ 를 만족하는 양수 x 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	...
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	...
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$ 의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \frac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$ 이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$ 이므로 $x = 451$

18. 5^{40} 을 $a \times 10^n$ ($1 < a < 10, n$ 은 정수)의 꼴로 나타낼 때, $\log a$ 의 소수 부분을 다음 상용로그표를 이용하여 구한것은?

수	0	1	2	3
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284
2.2	0.3234	0.3444	0.3464	0.3483
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674
2.4	0.3802	0.3820	0.3888	0.3856

- ① 0.064 ② 0.18 ③ 0.408 ④ 0.84 ⑤ 0.96

해설

$5^{40} = a \times 10^n$ 에서 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 5^{40} = \log(a \times 10^{40}) = n + \log a \cdots \text{㉠}$
 $1 < a < 10$ 이므로 $0 < \log a < 1$ 이다.
 $\log 5^{40} = 40 \log 5 = 40 \times (1 - \log 2)$
 $= 40 \times 0.6990$
 $= 27.96$

이므로 ㉠에서 $n = 27, \log a = 0.96$
따라서 $\log a$ 의 소수 부분은 0.96이다.

19. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.138} &= \frac{1}{3} \log 0.138 = \frac{1}{3} \log (1.38 \times 10^{-1}) && \text{따 라 서} \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1) \\ &= -0.2867 = -1 + 0.7133\end{aligned}$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133이다.

20. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로
$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.141} &= \frac{1}{3} \log 0.141 = \frac{1}{3} \log (1.41 \times 10^{-1}) \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1) \\ &= -0.2836 = -1 + 0.7164\end{aligned}$$
따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164이다.

21. $\log x$ 의 정수 부분이 4이고, $\log y$ 의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$ 의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\log x = 4 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log y = 2 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

$$= \frac{1}{2} (4 + \alpha + 2 + \beta)$$

$$= 3 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq \frac{1}{2} (\alpha + \beta) < 1$$

$$\therefore \log \sqrt{xy} \text{의 정수 부분은 } 3$$

22. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439 \\ &\text{소수 셋째 자리에서 반올림하면 } 2.44\end{aligned}$$

23. 다음은 2.3^9 의 값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}\log 2.3^9 &= 9 \log 2.3 = (\ominus) \\ \log 1.8 &= 0.2553 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 3 + 0.2553 \\ &= 3 + \log 1.8 \\ &= \log (\textcircled{\hspace{0.5cm}}) \\ \therefore 2.3^9 &= (\textcircled{\hspace{0.5cm}})\end{aligned}$$

위의 과정에서 $(\ominus)$, $(\textcircled{\hspace{0.5cm}})$ 에 알맞은 수를 차례로 나열한 것은? (단, $\log 1.8 = 0.2553$, $\log 2.3 = 0.3617$)

- ① 3.2553, 1800

② 3.2553, 180

③ 4.2553, 2800
- ④ 4.52553, 280

⑤ 5.2553, 18000

해설

$$\begin{aligned}\log 2.3 &= 0.3617 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 9 \log 2.3 = 9 \times 0.3617 = 3.2553 \\ \log 1.8 &= 0.2553 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 3 + 0.2553 \\ &= 3 + \log 1.8 = \log 10^3 + \log 1.8 \\ &= \log (10^3 + 1.8) = \log 1800 \\ \text{따라서 } 2.3^9 &= 1800\end{aligned}$$

24. 1보다 큰 양수 a 의 상용로그의 정수 부분을 x 라 할 때, 다음 식이 성립한다.

$$-x + \log a = \frac{x^2 - 2x - 2}{6}$$

이때, $6 \log a$ 의 값은?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$-x + \log a$ 의 값이 $\log a$ 의 소수 부분이므로

$$0 \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{6} < 1$$

$$0 \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{6} \text{에서 } x^2 - 2x - 2 \geq 0$$

$$\therefore x \geq 1 + \sqrt{3} \ (\because x > 0) \cdots \textcircled{A}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{6} < 1 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$\therefore -2 < x < 4 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 1 + \sqrt{3} \leq x < 4$$

그런데 x 는 정수이므로 $x = 3$

$$\therefore \frac{x^2 - 2x - 2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$-x + \log a = \frac{1}{6} \text{이므로 } \log a = \frac{1}{6} + 3 = \frac{19}{6}$$

$$\therefore 6 \log a = 6 \times \frac{19}{6} = 19$$

25. 2.4^n 의 정수부분이 네 자리가 되도록 하는 최소의 정수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

2.4^n 의 정수부분이 4자리이므로 $\log 2.4^n$ 의 지표는 3이다.

$$3 \leq \log 2.4 < 4$$

$$\frac{3}{\log 2.4} \leq n < \frac{4}{\log 2.4}$$

$$\text{이때, } \log 2.4 = \log \frac{24}{10} = \log 24 - \log 10$$

$$= \log(2^3 \times 3) - \log 10$$

$$= 3 \log 2 + \log 3 - 1$$

$$= 3 \times 0.3 + 0.48 - 1 = 0.38$$

$$\text{이므로 } \frac{3}{0.38} \leq n < \frac{4}{0.38}$$

$$\therefore 7.89 \times \times \times \leq n < 10.52 \times \times \times$$

따라서 위의 범위를 만족하는 최소의 정수 n 의 값은 8이다.