1. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}$$
$$+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}=\frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x(x+8)}=\frac{4}{x(x+8)}$$
$$=\frac{4}{9}$$

$\therefore x(x+8)=9$

$x^2+8x-9=(x-1)(x+9)=0$

$x>0$ 이므로 $x=1$

2. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$

$=\frac{5}{x(x+10)}$

$a=5,\ b=10$이므로 $a+b=15$

3. 다음 식의 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수 x에 대하여 등식

$$\frac{4}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-4}+\frac{12}{x^2-9}+\cdots+\frac{40}{x^2-100}$$
$$=k\left\{\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

이 항상 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $k=22$

해설

(주어진 식)

$$=2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\cdots+2\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}$$
$$=2\left\{\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

$\therefore k=22$

4. $xy-2x-2y+1=0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면 ⑤ 답이 없다.

해설

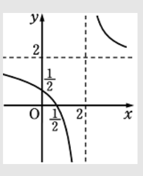
$xy-2x-2y+1=0$

$y(x-2)=2x-1$

$y=\dfrac{2x-1}{x-2}$

$=2+\dfrac{3}{x-2}$

점근선 $x=2,\ y=2$



$\therefore$ 지나지않은 사분면은 제 3 사분면이다.

5. 분수함수 $y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1,\ y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$y=\dfrac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1,\ y=6$ 이므로

$y=\dfrac{6(x-1)+9}{x-1}=\dfrac{9}{x-1}+6$

$\therefore\ a=-1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=5$

6. 분수함수 $y = \frac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 이므로
주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2$, $y = -3$ 이다.
$\therefore 2 + (-3) = -1$

7. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

8. 보기 중 유리수인 것은 모두 몇 개인가?

$\sqrt{10}^{\log_{10} 4}$, $\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}$, 2^{-10}, $10^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt{2}^{-\log_2 4}$, $(\log_2 16)^{\frac{1}{2}}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

Q를 유리수의 집합이라 하자.

$\sqrt{10}^{\log_{10} 4} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_{10} 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \in Q$

$\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} \notin Q$

$2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} \in Q$

$10^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \notin Q$

$\sqrt{2^{-\log_2 4}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_2 \frac{1}{2}} = 2^{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \in Q$

$(\log_2 16)^{\frac{1}{2}} = (\log_2 2^4)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \in Q$

따라서, 유리수인 것은 4개다.

9. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$\log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$

$= \frac{5}{12}$

10. $3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2}$ 을 간단히 하면?

① $\log_3 2$　　② 1　　③ $2\log_3 2$

④ $\log_2 3$　　⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2} &= 3^{\log_3 16 - \log_3 8} \\ &= 3^{\log_3 2} \\ &= 2^{\log_3 3} = 2 \end{aligned}$$

11. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$이므로

$$\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$$
$$= -0.3034 = -1 + 0.6966$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$의 소수 부분은 0.6966이다.

12. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 $f,\ g$ 가 $f(x) = x^2 + x,\ f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은 ?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$f^{-1}(2) = c$ 라 하면 $f(c) = 2 \to c^2 + c = 2$

$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c-1)(c+2) = 0$

$c > 0$ 이므로 $c = 1$

$\therefore\ f^{-1}(2) = 1$

$f(x)g(x) = x + 2$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(1)g(1) = 3$

$(1^2 + 1)g(1) = 3$

$\therefore\ g(1) = \frac{3}{2}$

$$\therefore\ (g \circ f^{-1})(2) = g\left\{f^{-1}(2)\right\} = g(1) = \frac{3}{2}$$

13. 함수 $f(x)=2x-5$ 의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=y=2x-5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x=2y-5$
$x=2y-5$ 를 y 에 대하여 정리하면
$y=\frac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(-3)=1$
|다른풀이| $f^{-1}(-3)=a$ 로 놓으면
$f(a)=-3$ 에서 $f(a)=2a-5=-3$, $2a=2$
$\therefore a=f^{-1}(-3)=1$

14. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ 로 놓으면,
$f(1) = -1, \ f(2) = 3$ 이므로
$f(1) = a + b = -1, \ f(2) = 2a + b = 3$
즉, $a = 4, \ b = -5$
$\therefore \ f(x) = 4x - 5$
$f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
$4a - 5 = 1 \quad \therefore \ a = \dfrac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \dfrac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

15. 수열 $\{a_n\}$을 $\log_3 a_1a_2a_3\cdots a_n = n(n-1)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의할 때, $\dfrac{a_{21}}{a_{20}}$의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

해설

$\log_3 a_1a_2a_3\cdots a_n = n(n-1)$에서

$a_1a_2a_3\cdots a_n = 3^{n(n-1)}\cdots$㉠

$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1} = 3^{(n-1)(n-2)}\cdots$㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면 $a_n = 3^{2(n-1)}$

$\therefore\ \dfrac{a_{21}}{a_{20}} = \dfrac{3^{40}}{3^{38}} = 3^2 = 9$

16. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$
$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$
$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$

17. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n =$ (7^n을 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{2014} a_n$의 값은?

① 10076 ② 10073 ③ 10075

④ 10076 ⑤ 10079

해설

$\{a_n\}$: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, $\cdots$
으로 4항마다 같은 항이 반복된다.
$2014 = 4 \times 503 + 2$이므로
$\sum_{n=1}^{2014} a_n = \sum_{n=1}^{503} (7+9+3+2) + a_1 + a_2$
$= \sum_{n=1}^{503} 20 + 7 + 9 = 20 \times 503 + 16 = 10076$