

1. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t - 2)^2 - 2 \quad (-2 \leq t \leq 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

2. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
 $t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$.
 t 의 범위는 x 에 의해 $1 \leq t \leq 5$ 가 된다.
 $\begin{cases} t = 2 \text{일때, } y = -3 \\ t = 5 \text{일때, } y = 6 \end{cases}$
 $\therefore M \times m = -18$

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

4. 세 꼭지점이 A(-2, 1), B(2, 3), C(3, -2)로 주어지는 삼각형의 외심의 좌표는?

- ① $\left(\frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right)$
- ② $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- ③ $\left(1, \frac{2}{11}\right)$
- ④ $\left(\frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)$
- ⑤ $\left(\frac{10}{11}, \frac{2}{11}\right)$

해설

외심이란 세변의 수직이등분선의 교점이므로 세 변 중 두변의 수직이등분선의 교점도 삼각형의 외심이다. 우선, 선분 AB 중점의 좌표를 구하면 (0, 2)이고, 직선 AB 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -2
∴ 기울기가 -2이고, 중점 (0, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $y = -2x + 2 \cdots \textcircled{1}$

선분 AC 중점의 좌표를 구하면 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 직선 AC의 기울기가 $-\frac{3}{5}$ 이므로 선분 AC 수직이등분선의 기울기는 $\frac{5}{3}$

∴ 기울기가 $\frac{5}{3}$ 이고, 중점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면, $x = \frac{10}{11}, y = \frac{2}{11}$

따라서 외심의 좌표 : $\left(\frac{10}{11}, \frac{2}{11}\right)$

5. 세 점 A(0,0) B(1,1) C(0,2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

㉠ (0,1)

㉡ (1,0)

㉢ (0,-1)

㉣ (-1,0)

㉤ (1,-1)

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\triangle ABC$ 의 외심은 빗변인 $\overline{AC}$ 의 중점이다.

$\therefore$ 외심은 (0,1)

6. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

- ① O(1, -2) ② O(2, 2) ③ O(2, -2)
④ O(2, -1) ⑤ O(1, -1)

해설

외심의 좌표를 O(a, b)라 하면

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore 7a - b = 16 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$\overline{OA} = \overline{OC}$, 즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore 2a - b = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = 2, b = -2$$

$$\therefore O(2, -2)$$

7. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 30u

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

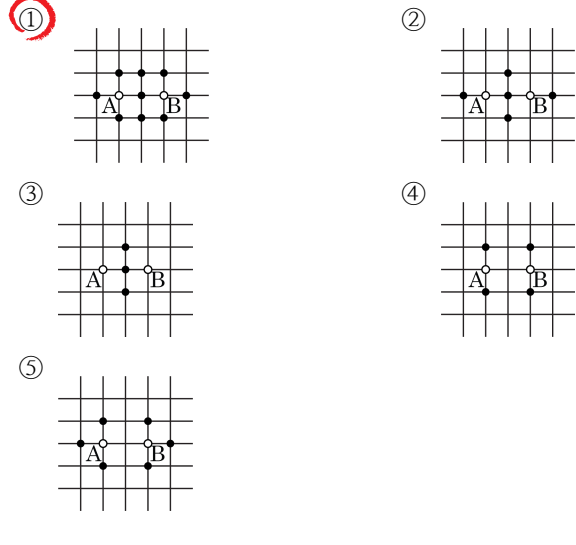
8. 3km 떨어진 두 마을 ㄱ, ㄴ이 있다. ㄱ마을에는 100명의 학생이, ㄴ마을에는 50명의 학생이 있다. ㄱ, ㄴ 두 마을 사이에 학교를 세울 때 통학거리의 합이 최소가 되려면 어디에 학교를 세워야 하는가?

- ① ㄱ마을
- ② ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 1km지점
- ③ 가운데
- ④ ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 2km지점
- ⑤ ㄴ마을

해설

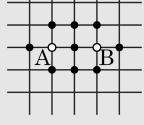
ㄱ마을에서 x km 떨어진 곳에 학교를 세운다면 ㄴ마을 으로부터는 $(3-x)$ km 떨어져 있다. 통학거리의 합 S 는 $S = 100x + 50(3-x)$
 $= 150 + 50x$
 $x \geq 0$ 이므로 $x = 0$ 일 때 S 는 최소가 된다. 즉, ㄱ마을에 학교를 세우면 된다.

9. 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 두 차량이 각각 A와 B에서 출발하여 A, B 이외의 교차로 P에서 만났다. 두 차량이 움직인 거리의 합이 4가 되는 P의 위치를 모두 표시하면?



해설

두 차량이 움직인 거리를 각각 x , y 라 하면
 $x + y = 4$
 (단, x, y 는 양의 정수)
 $\therefore x = 1, y = 3$ 또는 $x = 2, y = 2$
 또는 $x = 3, y = 1$
 각각의 경우에 해당하는 점 P의 위치를
 모두 모아서 그림으로 나타내면 다음과 같다.



10. 다음 중에서 점 $(2, 4)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 4$

㉢ $3x + 4y + 10 = 0$

㉣ $3x - 4y + 10 = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉢, ㉣

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 으로 놓으면

접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

㉠이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$2x_1 + 4y_1 = 4, x_1 + 2y_1 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$

또, 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$x_1^2 + y_1^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1 = 2, y_1 = 0$ 또는 $x_1 = -\frac{6}{5}, y_1 = \frac{8}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x = 2$ 또는 $3x - 4y + 10 = 0$

11. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행 이동하였더니 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하였다. 이 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을
 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면,
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$
 이 원이 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하므로
 원의 중심 $(2, -1)$ 에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.
 즉, $\frac{|2a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$ 에서 $|2a| = \sqrt{a^2 + 1}$,
 $4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$
 $\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because a > 0$)

12. 점 $(0, 2)$ 를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 2$

② $y = -\sqrt{3}x - 2, y = \sqrt{3}x + 2$

③ $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 3$

④ $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x - 2$

⑤ $y = -\sqrt{3}x + 4, y = \sqrt{3}x + 2$

해설

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y - 2 = m(x - 0)$$

$$\therefore y = mx + 2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하고 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 이 $\textcircled{1}$ 에 접하려면 방정식 $\textcircled{3}$ 이 중근을 가져야 하므로

$$D/4 = (2m)^2 - 3(m^2 + 1) = 0$$

$$\therefore m^2 = 3$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{3}$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $y = \pm \sqrt{3}x + 2$

해설

(다른 풀이1) 접점을 (x_1, y_1) 이라면

$$\text{접선방정식은 } x_1x + y_1y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

점 $(0, 2)$ 는 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로

$$2y_1 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

한편, (x_1, y_1) 은 원 $\textcircled{1}$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } (x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$y = -\sqrt{3}x + 2, y = \sqrt{3}x + 2$$

(다른 풀이2) 점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선의

기울기를 m 이라 하면 $y - 2 = m(x - 0)$

$$\therefore mx - y + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 의 중심에서 $\textcircled{1}$ 까지의 거리가

$$\text{원의 반지름과 같으므로 } \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$\therefore \sqrt{m^2 + 1} = 2$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{3}$$

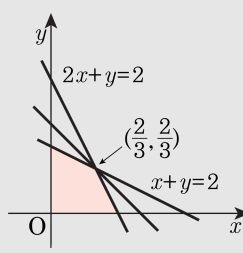
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y = \pm \sqrt{3}x + 2$

13. 두 실수 x, y 가 부등식 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 2, x + 2y \leq 2$ 를 모두 만족시킬 때, 실수 $x + y$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

$x + y = k$ 라 하면,
 $x + y = k$ 이 직선을 영역 안에서 움직여보면
 점 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 를 지날 때 최대이므로
 $x + y$ 의 최댓값은
 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

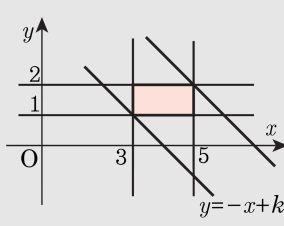


14. 부등식 $3 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 2$ 의 점 (x, y) 에 대하여 $x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

부등식 $3 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 2$ 는
 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.
 이 때, $x+y=k$ 라 하고 영역에서
 움직여 보면
 점 $(3, 1)$ 을 지날 때 k 는 최솟값 4
 를 갖고
 점 $(5, 2)$ 를 지날 때 k 는 최댓값 7을 갖는다.
 따라서, $M=7$, $m=4$ 이므로 $M-m=3$



15. 두 정수 x, y 의 값의 범위가 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ 일 때,
 $f(x, y) = x + y + 2$ 의 최댓값과 최솟값을 바르게 구한 것은?
- ① 4, 0 ② 2, 0 ③ 3, -2
④ 2, -2 ⑤ 4, -1

해설

각 범위에 속하는 x, y 의 값은 $-1, 0, 1$ 이다.
주어진 $f(x, y) = x + y + 2$ 의 값은 x 와 y 의 값이 모두 가장 클 때가 최대이므로 최댓값은 4 이고,
 x 와 y 의 값이 모두 가장 작을 때가 최소이므로 최솟값은 0 이다.

해설

$-1 \leq x \leq 1$ 와 $-1 \leq y \leq 1$ 에서 $-2 \leq x + y \leq 2$
따라서 양변에 2 를 더하면 $0 \leq x + y + 2 \leq 4$ 이므로
최댓값은 4 이고 최솟값은 0 이다

16. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\quad\text{가}\quad)$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\quad\text{나}\quad)}{4a^2}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\quad\text{다}\quad)}{2a}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ② $\frac{b}{2a}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ③ $\frac{b}{2a}, b^2-4ac, \pm\sqrt{b^2-4ac}$
- ④ $\frac{b}{4a^2}, \sqrt{b^2-4ac}, b^2-4ac$
- ⑤ $\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{2}\right)^2-ac, \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$
 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

17. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
(2) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = 0$

- ① (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\frac{3 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\frac{1 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4 \pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$

$\therefore 5x^2 - 8x + 4 = 0$

$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{5} = \frac{4 \pm 2i}{5}$

(2) $x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

18. 실수 a, b 에 대하여 연산*를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3, 2$
 $\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$
 $\therefore \alpha + 2\beta = 1$