1. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : X \to Y$ 를 모두 고르면?

(i) $f(x) = Y$(단, $x \in X$) (ii) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ (단,x, $x_2 \in X$)

A . $f(x) = x^2 - 1$ B . $f(x) =\| x \| +2x$ C . $f(x) = x^3 + 1$ D . $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

① A, B ② A, C ③ B, C ④ B, D ⑤ C, D

해설

주어진 성질은 일대일대응을 말하는 것이므로
해당되는 함수는 B, C 이다.

2. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \to A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지

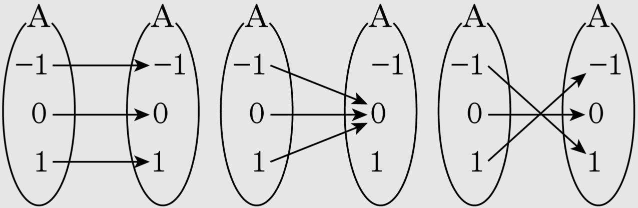
④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$

$\therefore f(0) = 0 \cdots$ ㉠

$f(-1) = -f(1) \cdots$ ㉡



㉠, ㉡을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

3. 집합 $A = \{x \mid x > 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f \circ g$ 가 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 일 때, $(f \circ (g \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(f \circ (g \circ f)^{-1}) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1}) = g^{-1}$

$\therefore g^{-1}(3) = k$ 라 하면

$g(k) = 3$

$\Rightarrow \sqrt{2}k - 1 = 3 \Rightarrow k = 5$

4. 함수 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

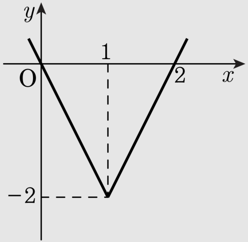
$y = 2|x-1|-2$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1)-2 = -2x$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x-1)-2 = 2x-4$

따라서 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$



5. 다음 식의 최댓값을 구하면?

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

해설

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

$$= \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}$$

$$\therefore \text{(준식)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)}$$

$$= \frac{10}{x(x+10)} = \frac{10}{(x+5)^2 - 25}$$

$\therefore$ 최댓값은 $x = -5$ 일 때 $\frac{10}{-25} = -\frac{2}{5}$

6. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a-b-\frac{1}{b}$의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{19-8\sqrt{3}} &= \sqrt{19-2\sqrt{48}}\\ &= 4-\sqrt{3}\\ &= 4-1.\times\times\times\\ &= 2.\times\times\times\end{aligned}$$

정수 부분 $a=2$,

소수 부분 $b=4-\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}a-b-\frac{1}{b} &= 2-(2-\sqrt{3})-\frac{1}{2-\sqrt{3}}\\ &= 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=-2\end{aligned}$$

7. $y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $\mathrm{R} - \{-2\}$ 이다.

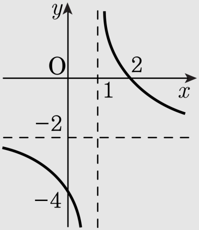
③ 제 2사분면을 지나지 않는다.

④ 점근선은 $x = 1,\ y = -2$ 이다.

⑤ 정의역은 $\mathrm{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프는 $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.



따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

8. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{5}{3}$　③ 2　④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

9. 분수함수 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ 의 그래프가 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$ 에 대하여 대칭일 때, $m+n$ 의 값을 구하면? (단, m, n은 상수)

① -3　　② 0　　③ 3　　④ 6　　⑤ 9

해설

$y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$이므로

주어진 분수함수의 그래프는 두 점근선

$x=1$, $y=3$ 의 교점 $(1,\ 3)$ 을 지나고

기울기가 ± 1 인 직선에 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=x+m$, $y=-x+n$ 은

점 $(1,\ 3)$ 을 지나므로

$3=1+m$, $3=-1+n$ 에서

$m=2$, $n=4$ $\therefore$ $m+n=6$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 2n$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$
\begin{aligned}
& a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\
&= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\
&= -360 - (-80) = -280
\end{aligned}
$$

11. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2}$

$- \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \frac{1}{150}S = 47$

12. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열일 때, $\dfrac{a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{17}}{a_1+a_3+a_5+a_7}$ 의 값은?

① 3^9　② 3^{10}　③ 3^{11}　④ 3^{12}　⑤ 3^{13}

해설

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$$\frac{3^{11}+3^{13}+3^{15}+3^{17}}{3+3^3+3^5+3^7}$$

$$= \frac{3^{10}(3+3^3+3^5+3^7)}{3+3^3+3^5+3^7}$$

$$= 3^{10}$$

13. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

㉡ $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)$

㉢ $1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $3+9+\cdots+3^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k}$(거짓)

㉡. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$(거짓)

㉢. 주어진 수열의 일반항은 $n\cdot 2^{n-1}$ 이므로

$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+10\cdot 2^9=\sum_{k=1}^{10}k\cdot 2^{k-1}$(참)

14. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2 = a_1 + 2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & \vdots \\ +) & \underline{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}} \\ & a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \end{array}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^n - 1$$

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

16. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 53

해설

$$\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \times 2}}}$$
$$= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24} \times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}$$

따라서 $P = 29,\ q = 24$이므로 $p + q = 53$

17. $\sqrt[3]{a}=81$, $\sqrt{\sqrt{b}}=125$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 225

해설

$\sqrt[3]{a}=81=3^4$에서 $a=3^{12}$

$\sqrt{\sqrt{b}}=125$, $\sqrt[4]{b}=5^3$ $\therefore b=5^{12}$

이때, $ab=3^{12}\cdot 5^{12}=15^{12}$

$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}}=\sqrt[6]{ab}=\sqrt[6]{15^{12}}$

$=15^{\frac{12}{6}}=15^2=225$

18. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\ (\text{단, } x>1)$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$

$$=\log_2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$

$$=\log_2\{(x+1)-(x-1)\}=\log_2 2=1$$

19. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41 \times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164이다.

20. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$\log a$가 $\log 2$와 $\log 8$의 등차중항이므로 $2\log a = \log 2 + \log 8 = \log 16 = \log 4^2 = 2\log 4$

$\therefore\ a = 4$

b가 16의 등비중항이므로 $b^2 = 16a = 64$

$\therefore\ b = 8\ (\because b > 0)$

$\therefore\ a + b = 4 + 8 = 12$

21. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$f(-2)=\frac{6+1}{-2+3}=7$$

$$f^2(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$$

$$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=7$$

$$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(7)=-2$$

$$\vdots$$

$$f^{2006}(-2)=-2$$

$$f^{2007}(-2)=7$$

$$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$$

22. $f\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$f^{-1}(3x-1)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 이므로

$3x-1=11$ 에서 $x=4$

$$\therefore\ f^{-1}(11)=\frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}$$
$$=-3$$

23. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3}-1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$　　② $(-3,\ -1)$

③ $(1,\ 1)$　　④ $(-2,\ -2)$

⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는

$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3}-1 = x$에서

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1, -2$

$x = 1 (\because\ x \geq -1)$

$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

24. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 에 대하여 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

㉡ $f(x)+f(1-x)=1$

㉢ $\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 에 대하여

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$(참)

㉡ $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$

$\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\cdot 4^x}=\dfrac{4^x+2}{4^x+2}=1$(참)

㉢ $\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)$

$=f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)$

$=\left\{f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)\right\}+$

$\left\{f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)\right\}+\cdots+$

$\left\{f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(\frac{51}{101}\right)\right\}$

$=1+1+\cdots+1$ ($\because$ ㉡에 의해)

$=50$(참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

25. 다음과 같이 배열된 55개의 수의 합은?

1									
2	4								
3	6	9							
4	8	12	16						
5	10	15	20	25					
6	12	18	24	30	36				
7	14	21	28	35	42	49			
8	16	24	32	40	48	56	64		
9	18	27	36	45	54	63	72	81	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

① 1655 ② 1705 ③ 1715 ④ 1725 ⑤ 1735

해설

위에서부터 차례로 제1군, 제2군, $\cdots$ 이라 하면 제k군은 첫째항이 k이고, 공차가 k, 항수가 k인 등차수열이므로 제 k군의 합을 a_k라 하면

$$a_k = \frac{k\{2k+(k-1)k\}}{2} = \frac{k^3+k^2}{2}$$

따라서 주어진 55개의 수의 합을 S 라 하면

$$S = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3+k^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 + \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}\right\}$$

$$= 1705$$