1. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$

z^2의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x + 1 = 0,\quad x = -1$

2. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$　　② 3　　③ $4i$
④ 5　　⑤ $1+3i$

해설

$4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$
$=4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$
$=4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
$=4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3$

3. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$　　② $-i$　　③ i

④ $1 + i$　　⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$\begin{aligned}(2+i) \circledcirc z &= \{(2+i)+i\}(z+i) \\ &= (2+2i)(z+i) = 1\end{aligned}$$

$z + i = \dfrac{1}{2+2i}$ 이므로

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{2+2i} - i \\ &= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i \\ &= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i\end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2-2ax-3a=0$이 중근을 갖도록 하는 a의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a=-3,\ x=-3$ ② $a=-3,\ x=0$
③ $a=0,\ x=-3$ ④ $a=3,\ x=0$
⑤ $a=3,\ x=3$

해설

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3a)=0$
$a^2+3a=0,\ a(a+3)=0$
$a=-3$ 또는 0
(ⅰ) $a=-3$일 때,
$x^2+6x+9=0$
$(x+3)^2=0$
$\therefore x=-3$(중근)
(ⅱ) $a=0$일 때,
$x^2=0$
$\therefore x=0$

5. 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$의 값을 구하면?

① 2 ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $-\dfrac{22}{25}$ ④ $\dfrac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \ \alpha\beta=5$

$\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{8-15\times2}{25}=-\dfrac{22}{25}$

6. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \leq 0$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$ ④ $a \geq 1$ ⑤ $a \leq 2$

해설

$f(x) = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 은
$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.
$\therefore f(x) \geq a - 1$
$f(x) = t$ 라면
$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \geq a - 1)$
이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이
$t \geq a - 1$ 에 포함되면
$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.
즉, $-1 \geq a - 1$ $\therefore a \leq 0$

7. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

8. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

9. 다음 연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \cdots\cdots ㉡ \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=3 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=\frac{1}{2}$ 또는 0.5

▷ 정답 : $y=1$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \cdots\cdots$ ㉣

㉣ − ㉠에서 $\frac{1}{z}=1, \quad \therefore z=1$

㉣ − ㉡에서 $\frac{1}{x}=2, \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

㉣ − ㉢에서 $\frac{1}{y}=1 \quad \therefore y=1$

10. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

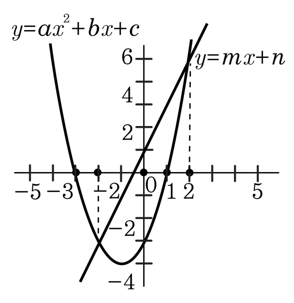
▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D \leq 0$
$\frac{D}{4}=m^2+m \leq 0$
$m(m+1) \leq 0,\ -1 \leq m \leq 0$
$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

11. 일차함수 $y = mx + n$ 과 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



연립이차부등식
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$
의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$
에서 위의 식의 근은 $-3 < x < 1$, 아래 식의 근은 $-2 < x < 2$ 이다.
따라서 공통범위는 $-2 < x < 1$ 이다. $-2 \times 1 = -2$

12. 다음은 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

> 직선 BC를 x축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, A$(a,\ b)$, B$(-c,\ 0)$, C$(c,\ 0)$라고 하자. (단, $b \neq 0$, $c > 0$)
>
> (ⅰ) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y = \boxed{\quad(가)\quad}\left(x - \dfrac{a+c}{2}\right) + \dfrac{b}{2}$
>
> $\quad = \boxed{\quad(가)\quad}x + \boxed{\quad(나)\quad}$ ……㉠
>
> 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y = -\dfrac{a+c}{b}x + \boxed{\quad(나)\quad}$ ……㉡
>
> 두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $(0, \boxed{\quad(나)\quad})$에서 만난다. 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
>
> (ⅱ) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때
>
> $\triangle$ABC는 $\boxed{\quad(다)\quad}$이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
>
> 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

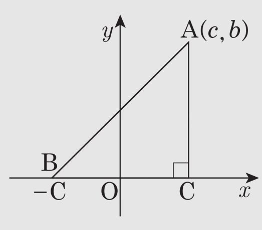
③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{b}{a-c}$이므로 변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\dfrac{b}{a-c}\cdot m = -1$에서 $m = -\dfrac{a-c}{b}$이다.



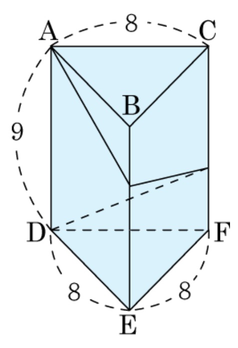
이때, 중점 E$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$이므로 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
$$= -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{b}{2}$$
$$= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이다.

13. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

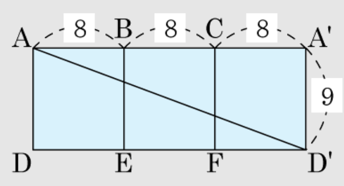


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



14. 길이가 36인 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 4 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

수직선 위에서

A(0), B(36) 이라 하고, C(x)라 하면

$x = \dfrac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3+1} = 27$

B(36), C(27)이므로 D(y)라 하면

$y = \dfrac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4-1} = 24$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = 24$

15. 다음 두 직선 $y = (2a+1)x - a + 2$, $y = (a+2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -1

▷ 정답: $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$(2a+1)(a+2) = -1$

$2a^2 + 5a + 3 = 0$

$(2a+3)(a+1) = 0$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

16. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
$(-a)\cdot\frac{b}{3}=-1, \quad \therefore\ ab=3\cdots$㉠
l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.
$-a=-b-2, \quad \therefore\ a-b=2\cdots$㉡
㉠, ㉡을 이용하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4+6=10$

17. 점 A(8, 0) 과 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$ ② $x^2+(y-4)^2=4$
③ $x^2+(y+4)^2=4$ ④ $(x-4)^2+y^2=4$
⑤ $(x+4)^2+y^2=4$

해설

$x^2+y^2=16$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(8,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$ 는
$M\left(\frac{a+8}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+8}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-8,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=16$ 이 성립한다.
$(2x-8)^2+(2y)^2=16$
$\therefore (x-4)^2+y^2=4$

18. 점 $(3,\ 1)$ 에서 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x - y = 2,\ ax + by = 10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

① 1　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 12

해설

점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로 $3a + b = 10 \ \cdots$ ㉠
원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로
$\dfrac{|-10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2},\ \ a^2 + b^2 = 50 \ \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면,
$a^2 + (10 - 3a)^2 = 50$
$10a^2 - 60a + 50 = 0$
$a^2 - 6a + 5 = 0$
$\therefore\ a = 1,\ 5$
$\therefore\ a = 5,\ b = -5$ 또는 $a = 1,\ b = 7$
한 접선의 방정식이 $x - y = 2$ 이므로,
$a = 1,\ b = 7$
$\therefore\ ab = 7$

19. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

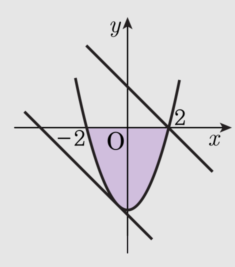
해설

$(-1,\ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$
$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$
$\therefore\ a=1,\ b=5$

20. 다음 연립 부등식 $y \geq x^2 - 4,\ y \leq 0$ 을 만족하는 $x,\ y$ 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값은?

① -13　② $-\dfrac{13}{2}$　③ $-\dfrac{13}{4}$　④ $-\dfrac{17}{2}$　⑤ $-\dfrac{17}{4}$

해설



$x + y = k$ 라 하면
직선 $y = -x + k$ 가
점 (2, 0) 를 지날 때, k 의 최댓값 M은 2 이고,
$y = x^2 - 4$ 와 접할 때, k는 최소이므로
$x^2 - 4 = -x + k,\ x^2 + x - 4 - k = 0$
$D = 1 + 4(4 + k) = 0$
k의 최솟값 $m = -\dfrac{17}{4}$
따라서 $M \cdot m = -\dfrac{17}{2}$

21. 두 양의 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$　② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})-2=0$

$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$

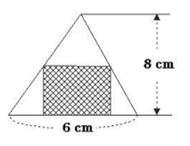
$2t^2+t-2=0$

근의 공식에 대입하면

$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ (t>0)\ \frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

22. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 6 cm , 높이가 8 cm 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 $12\,\text{cm}^2$ 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

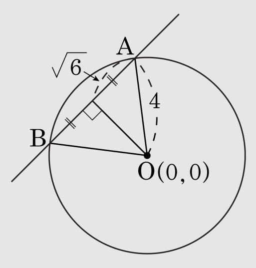
삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.
닮음 조건에 의해 $\alpha : 8-\beta = 3 : 4$
$\Rightarrow \quad 3\beta = 24 - 4\alpha,$
넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$
$\therefore \ \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, \ (\alpha - 3)^2 = 0$
$\therefore \ \alpha = 3$

23. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

① 2　② $2\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$

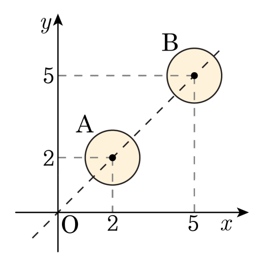
따라서 원의 중심 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10},\ |k| = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ k = 2\sqrt{5}\ (\because\ k > 0)$

24. 다음 그림의 도형 A 는 부등식 $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 1$ 의 영역이고, B 는 부등식 $(x-5)^2+(y-5)^2 \le 1$ 의 영역이다. 도형 A 가 직선 $y=x$ 를 따라 x 축 양의 방향으로 평행 이동한다고 할 때, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동하면 도형 A 가 처음으로 B 의 중심을 지난다고 한다.
$a+b$ 의 값은?



① $4+2\sqrt{2}$ ② $4-2\sqrt{2}$ ③ $4+\sqrt{2}$
④ $6-\sqrt{2}$ ⑤ $6+\sqrt{2}$

해설

문제의 조건을 만족시키려면
직선 $y=x$ 위에 있는 원 A 의 지름의 양 끝점 중 위쪽에 있는 점
$\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 가
원 B 의 중심 $(5,\ 5)$ 로 평행 이동해야 한다.
즉, $\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+a=5,\ \left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=5$
따라서 $a=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ b=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ a+b=6-\sqrt{2}$

25. 연립부등식 $x \leq 0,\ y \geq 0,\ 4 \leq -x + 2y \leq 8$ 을 만족하는 점 $\mathrm{A}(x,\ y)$ 에 대하여 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 과 점 A 를 이은 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이의 최댓값은?

① 2 ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ 4 ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ 8

해설

이때, 원점과 점 A 를 이은 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이가 최대일때는 점 A 가 $(-8,\ 0)$ 일 때 이다.
따라서 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이의 최댓값은 8 이다.