1. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$\mathrm{A}(-3, 5)$, $\mathrm{B}(6, -13)$

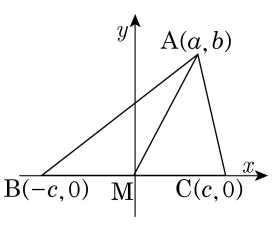
▶ 답 :

▷ 정답 : $9\sqrt{5}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(6+3)^2 + (-13-5)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$

2. 다음은 △ABC 에서 변 BC의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC 에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 라 하면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고, $\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 따라서 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$(나) $\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=$(다)$(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

$A(a,b)$, $B(-c,0)$, $C(c,0)$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$

$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2=a^2+b^2, \overline{BM}^2=c^2$ 이므로

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

3. 두 점 A$(-4,\ -3)$, B$(11,\ 9)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는?

① $(1,1)$ ② $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ ③ $(3,3)$

④ $\left(\frac{7}{5},\frac{5}{2}\right)$ ⑤ $(6,5)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 (x,y) 라 하면

$x=\frac{11-8}{1+2}=1,\ y=\frac{9-6}{1+2}=1$

$\therefore\ (1,\ 1)$

4. B(4, 2), C(0, 5) 인 △ABC 의 무게중심의 좌표가 (1, 1) 일 때, 꼭짓점 A 의 좌표를 구하면?

① A(−2, −3) ② A(−2, −4) ③ A(−1, −4)

④ A(−1, −3) ⑤ A(−1, 4)

해설

A$(x,\ y)$ 라 하면

$\frac{x+4+0}{3}=1$, $\frac{y+2+5}{3}=1$

$\therefore x=-1,\ y=-4$

5. 점 (1, 3) 을 지나고 기울기가 3 인 직선은?

① $y = 3x$ ② $y = -x + 2$ ③ $y = -2x + 3$

④ $y = -2x$ ⑤ $y = \frac{1}{3}x + 2$

해설

$y - 3 = 3(x - 1)$

$\Rightarrow \quad \therefore \ y = 3x$

6. 점 $(1,2)$ 를 지나고, x 축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라

▶ 답:

▷ 정답: $y=2$

해설

점 $(1,\ 2)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이므로
$\therefore\ y=2$

7. 점 $(2,-4)$ 를 지나고 직선$x-2y-4=0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=2x-1$ ② $y=-2x+1$ ③ $y=-x+2$

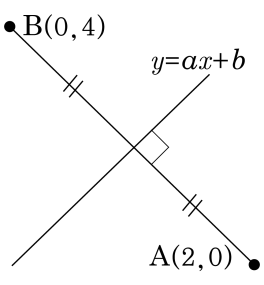
④ $y=x-2$ ⑤ $y=-2x$

해설

$2y=x-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

따라서 구하는 직선의 방정식의
기울기는 -2 이고 점 $(2,\ -4)$ 를 지나므로
$y+4=-2(x-2)$, $y=-2x$

8. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



① 4 ② 2 ③ 1 ④ −2 ⑤ −4

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{AB}$ 의 중점 M 은

$M(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, 2)$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

9. 점 $(2,-1)$ 과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$\therefore$ 거리 $= \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$

10. 원 $x^2+y^2-2kx-4=0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?

① 반지름의 길이가 2 인 원이다.

② 원의 중심은 y 축 위에 있다.

③ 원은 두 점 $(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$ 를 지난다.

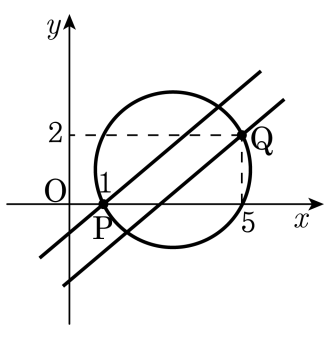
④ 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

⑤ 원은 점 $(1,\ 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2+y^2-2kx-4=0$ 을 변형하면
$(x-k)^2+y^2=4+k^2$ 이므로
$x=0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2=4$
$\therefore y=\pm 2$
따라서 주어진 원은
$(0,\ -2)$, $(0,\ 2)$ 의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

11. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 C(3, 1)이므로,
$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

12. 세 점 $(1,\ 1),\ (2,\ -1),\ (3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0\cdots\cdots$㉡이라 하면
㉡는 점 $(1,1),\ (2,-1),\ (3,\ 2)$를 지나므로
$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0,\ 4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,
$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$
$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$
$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$
$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

13. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d=7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.
② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다.
④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d=r_1+r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

14. 다음 점 $(-3, 4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3, -4)$ ② $(-4, 4)$ ③ $(4, -3)$
④ $(-4, 2)$ ⑤ $(-5, 0)$

해설

원점대칭은 x , y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

15. 점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 점 (a, b) 가 된다. 이 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

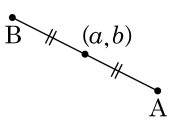
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(2, -5)$ 이고,
이 점을 다시 x 축의 방향으로 3 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
$(2 + 3, -5 - 2) = (5, -7) = (a,\ b)$
따라서, $a = 5,\ b = -7$ 이므로
$a - b = 12$

16. 다음 (　　) 안에 알맞은 말을 넣어라.



좌표평면 위의 두 점 A 와 B 가 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 서로 대칭이면 점 $(a,\ b)$ 는 두 점 A 와 B 의 (　　) 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 중점

해설

17. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ -4)$ 에 대하여 직선 AB 의 윗부분(경계선 제외)을 나타내는 부등식은?

① $y < -3x + 1$ ② $y > -3x + 1$ ③ $y < 3x - 1$

④ $y > 3x - 1$ ⑤ $y > 3x + 1$

해설

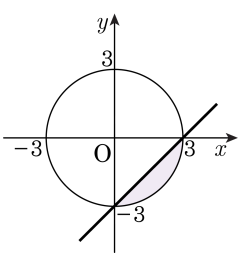
두 점 A$(1,\ 2)$, B$(-1,\ -4)$ 를 지나는
직선의 방정식은

$y - 2 = \dfrac{-4-2}{-1-1}(x-1)$

$\therefore\ y = 3x - 1$

따라서 이 직선의 윗부분(경계선 제외)의 영역을 나타내는 부등식은 $y > 3x - 1$

18. 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선 포함)



① $\begin{cases} y \le x-3 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

② $\begin{cases} y \le x+3 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

③ $\begin{cases} y \ge x-3 \\ x^2+y^2 \ge 9 \end{cases}$

④ $\begin{cases} y \ge x+3 \\ x^2+y^2 \ge 9 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} y \ge x-3 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

해설

주어진 그림에서 색칠한 부분은 원 $x^2+y^2=9$ 의 내부(경계선 포함)과 직선 $y=-3$ 의 아랫부분(경계선 포함)의 공통 부분이다.

따라서, 구하는 부등식은

$\begin{cases} y \le x-3 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$ 이다.

19. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4)$, $\mathrm{B}(6,3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$

$\therefore$ $\mathrm{P}=(2,0)$

$a+b=2$

20. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

21. 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2<k<2$　② $0<k<4$　③ $-4<k<0$

④ $-2<k<0$　⑤ $-4<k<4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4<k<4$$

22. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$　　② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$　　④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$

$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$

23. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

24. 부등식 $y \le -x^2 + 4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $P(x, y)$ 중 x, y가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x = 1$일 때

$y \le -1^2 + 4 = 3$이므로 $y = 1, 2, 3$

(ii) $x = 2$일 때

$y \le -2^2 + 4 = 0$

즉, 양의 정수 y는 존재하지 않는다.

따라서 x, y가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개이다.

25. 부등식 $3x+4y \geq 10$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값은?

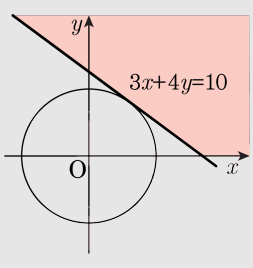
① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 20

해설

부등식의 영역을 그리면 색칠한 부분과 같고,

$x^2+y^2=k$ 라고 하면 원과 직선이 접할 때 k 가 최소이다.

⇒ 원과 직선이 접하면원 중심과 직선 사이거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{k}$$

$\Rightarrow k=4$