1. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 집합 B 가 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, 소수는 1 보다 큰 자연수 중에 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.)

① $\{x|x$는 10이하의 홀수$\}$ ② $\{x|x$는 15의 약수$\}$

③ $\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$ ④ $\{x|x$는 10이하의 소수$\}$

⑤ $\{x|x$는 5이하의 홀수$\}$

해설

① $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
② $\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$
③ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$
⑤ $\{1,\ 3,\ 5\}$

2. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{\varnothing\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이다.

② $\{x,\ y\}$ 는 $\{y\}$ 의 부분집합이 아니다.

③ $A \subset B,\ B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B,\ B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

⑤ $A \subset B,\ A \subset C$ 이면 $B \subset C$ 이다.

해설

① $\{\varnothing\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이 아니다. $\{3\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$ 과 $\{3\}$ 이다.

⑤ $A \subset B,\ A \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이고, B와 C의 포함 관계는 알 수 없다.

3. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.

③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.

④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.

⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

4. '모든 중학생은 고등학교에 진학한다' 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

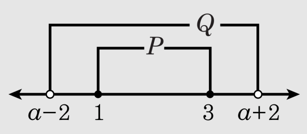
부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '<u>모든 중학생은</u>(p) <u>고등학교에 진학한다</u>(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

5. 두 조건 $p: 1 \le x \le 3$, $q: |x-a| < 2$에 대하여 $p \to q$이가 참이 되도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $1 < a < 3$ ② $1 \le a < 3$ ③ $1 < a \le 3$
④ $1 \le a \le 3$ ⑤ $2 < a \le 3$

해설

$p \to q \Rightarrow P \subset Q$, $|x-a| < 2 \leftrightarrow a-2 < x < a+2$



$\therefore a-2 < 1$ 그리고 $3 < a+2$
$\therefore 1 < a < 3$

6. 명제 '$x^2+2x+a \neq 0$ 이면 $x+1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

대우인 '$x+1=0$이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=0$

$\therefore\ a=1$

7. 세 명제 $\sim p \to q, q \to \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $R \subset Q^c$ ③ $R \cup P^c = R$
④ $P \subset R$ ⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \to q, q \to \sim r$ 가 참이므로
$\sim p \to q \to \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.
① $P \not\subset Q$
② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$
③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$
④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$
⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

8. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 <u>아닌</u> 것은?

① $p : x = -1,\ q : |x| = 1$

② p : $\triangle$ABC 에서 $\overline{\text{BA}} = \overline{\text{BC}}$, q : $\triangle$ABC 는 이등변삼각형

③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, $a,\ b$ 는 실수), $q : a = b = 0$

④ $p : x + y \geq 2,\ xy \geq 1,\ q : x \geq 1,\ y \geq 1$

⑤ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

해설

① 두 조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하면 $P = \{-1\}$, $Q = \{-1,\ 1\}$ 이므로 $P \subset Q,\ Q \not\subset P$
따라서, $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ 이므로
p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $\overline{\text{BA}} = \overline{\text{BC}}$ 이면 $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그런데 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{\text{BA}} = \overline{\text{BC}}$ 인 것은 아니다.
$\therefore q \nRightarrow p$
③ $a,\ b$ 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x + y \geq 2,\ xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 인 것은 아니다.
$\therefore\ p \nRightarrow q$
⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 4 개　② 8 개　③ 12 개　④ 24 개　⑤ 32 개

해설

'적어도~' 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.
모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합 수$\Rightarrow \{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개
$\therefore 32 - 8 = 24$(개)

10. 두 집합 $A = \{x|1 \le x \le 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X를 $X = \{x|p \le x \le q\}$라 할 때, q의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3　② 1, 5　③ 1, 7　④ 3, 5　⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \le x \le 3\} \subset X \subset \{x|1 \le x \le 5\}$

$X = \{x|p \le x \le q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \le q \le 5$

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, $U-(A \cup B)$ 은?

㉠ $U=\{x \mid x\text{는 10 이하의 자연수}\}$

㉡ $A \cap B^c=\{1\}$

㉢ $A^c \cap B=\{6, 10\}$

㉣ $A \cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$

① $\{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$　② $\{4,\ 5,\ 7,\ 9\}$
③ $\{4,\ 7,\ 9\}$　④ $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$
⑤ $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

해설

㉠. $U=\{x \mid x\text{는 10 이하의자연수}\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, 9,\ 10\}$
㉡. $A \cap B^c=\{1\}=A-B$
㉢. $A^c \cap B=\{6,\ 10\}=B-A$
㉣. $A \cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$에서
$A \cup B=\{1\} \cup \{6, 10\} \cup \{2, 4, 8\}$
$=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
$U-(A \cup B)=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

12. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \cup \varnothing = \varnothing$

④ $A \subset B$, $B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
③ $A \cup \varnothing = A$
⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

13. 전체집합U 의 두 부분집합A, B 에 대하여 연산 ★를$A★B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때,<보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A★B = B★A$

㉡ $(A★B)★C = A★(B★C)$

㉢ $A^c★B^c = A★B$

㉣ $A★A★A = A$

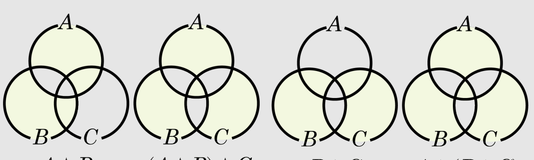
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $A★B = (A - B) \cup (B - A)$,
$B★A = (B - A) \cup (A - B)$
$\therefore\ A★B = B★A$

㉡ 연산 ★은 두 집합의 합집합에서 교집합을 빼는 것이므로 벤다이어그램을 그려서 확인해 보면 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.



$A★B$　$(A★B)★C$　$B★C$　$A★(B★C)$

㉢ $A^c★B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
$= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
$= (B - A) \cup (A - B)$
$= A★B$

㉣ $A★A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing$,
$A★A★A = \varnothing★A = (\varnothing - A) \cup (A - \varnothing) = A$

$\therefore$ 모두 옳다.

14. 집합 $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 $A \cup B = S$, $A \cap B = \varnothing$ 인 두 집합 A, B로 분할한다. 또 $f(A)$를 집합 A의 원소의 총합, $f(B)$를 집합 B의 원소의 총합이라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면 ?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25 ⑤ 45

해설

$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A \cup B = S$, $A \cap B = \varnothing$ 이므로, $f(A) + f(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(A) \cdot f(B) &= f(A)(10 - f(A)) \\ &= -\{f(A)\}^2 + 10f(A) \\ &= -\{f(A) - 5\}^2 + 25 \end{aligned}$$

$\therefore f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 25

15. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

'비둘기집의 원리'를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3\times3\times3 = 27$개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

대각선 길이 $= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다