

1. 집합 $A = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, 집합 B 가 될 수 없는 것은?
(단, 소수는 1보다 큰 자연수 중에 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.)

- ① $\{x|x\text{는 }10\text{이하의 홀수}\}$ ② $\{x|x\text{는 }15\text{의 약수}\}$
③ $\{x|x\text{는 }10\text{이하의 자연수}\}$ ④ $\{x|x\text{는 }10\text{이하의 소수}\}$
⑤ $\{x|x\text{는 }5\text{이하의 홀수}\}$

해설

- ① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
② $\{1, 3, 5, 15\}$
③ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
④ $\{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{1, 3, 5\}$

2. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{\emptyset\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이다.

② $\{x, y\}$ 는 $\{y\}$ 의 부분집합이 아니다.

③ $A \subset B$, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

⑤ $A \subset B$, $A \subset C$ 이면 $B \subset C$ 이다.

해설

① $\{\emptyset\}$ 은 $\{3\}$ 의 부분집합이 아니다. $\{3\}$ 의 부분집합은 $\emptyset$ 과 $\{3\}$ 이다.

⑤ $A \subset B$, $A \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이고, B 와 C 의 포함 관계는 알 수 없다.

3. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

4. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’의 부정인 명제는?

- ① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.
- ② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.
- ③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.
- ④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.
- ⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘ p 이면 q 이다’가 ‘ p 이면 q 가 아니다’이고, ‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’이다.

5. 두 조건 $p : 1 \leq x \leq 3$, $q : |x - a| < 2$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $1 < a < 3$

② $1 \leq a < 3$

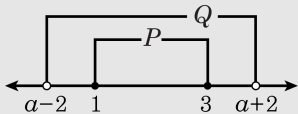
③ $1 < a \leq 3$

④ $1 \leq a \leq 3$

⑤ $2 < a \leq 3$

해설

$$p \rightarrow q \Rightarrow P \subset Q, |x - a| < 2 \Leftrightarrow a - 2 < x < a + 2$$



$$\therefore a - 2 < 1 \text{ 그리고 } 3 < a + 2$$

$$\therefore 1 < a < 3$$

6. 명제 ' $x^2 + 2x + a \neq 0$ 이면 $x + 1 \neq 0$ 이다' 가 참이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

① 3

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

대우인 ' $x + 1 = 0$ 이면 $x^2 + 2x + a = 0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

7. 세 명제 $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $R \subset Q^c$

③ $R \cup P^c = R$

④ $P \subset R$

⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로

$\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.

① $P \not\subset Q$

② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$

③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$

④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$

⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

8. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은?

① $p : x = -1, q : |x| = 1$

② $p : \triangle ABC$ 에서 $\overline{BA} = \overline{BC}, q : \triangle ABC$ 는 이등변삼각형

③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, a, b 는 실수), $q : a = b = 0$

④ $p : x + y \geq 2, xy \geq 1, q : x \geq 1, y \geq 1$

⑤ $p : A \cap B = A, q : A \subset B$

해설

① 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면 $P = \{-1\}, Q = \{-1, 1\}$ 이므로 $P \subset Q, Q \not\subset P$

따라서, $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로

p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

② $\overline{BA} = \overline{BC}$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

$\therefore p \Rightarrow q$

그런데 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 것은 아니다.

$\therefore q \not\Rightarrow p$

③ a, b 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x + y \geq 2, xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1, y \geq 1$ 인 것은 아니다.

$\therefore p \not\Rightarrow q$

⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 4개

② 8개

③ 12개

④ 24개

⑤ 32개

해설

‘적어도~’ 문제는 반대의 경우를 구하여 전체 경우의 수에서 빼준다.

모든 부분집합의 수 : 2^5 개 홀수만 가지고 만들 수 있는 부분집합 수 $\Rightarrow \{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 수 : 2^3 개

$$\therefore 32 - 8 = 24(\text{개})$$

10. 두 집합 $A = \{x|1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x|3 < x < 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 를 $X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 라 할 때, q 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 쓰면?

① 1, 3

② 1, 5

③ 1, 7

④ 3, 5

⑤ 3, 7

해설

조건에서 $X \subset A$, $(A - B) \subset X$ 즉, $\{x|1 \leq x \leq 3\} \subset X \subset \{x|1 \leq x \leq 5\}$

$X = \{x|p \leq x \leq q\}$ 에서 $p = 1$, $3 \leq q \leq 5$

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, $U - (A \cup B)$ 은?

㉠ $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1\}$

㉢ $A^c \cap B = \{6, 10\}$

㉣ $A \cap B = \{2, 4, 8\}$

① $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

② $\{4, 5, 7, 9\}$

③ $\{4, 7, 9\}$

④ $\{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

⑤ $\{3, 5, 7, 9\}$

해설

㉠. $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

㉡. $A \cap B^c = \{1\} = A - B$

㉢. $A^c \cap B = \{6, 10\} = B - A$

㉣. $A \cap B = \{2, 4, 8\}$ 에서

$A \cup B = \{1\} \cup \{6, 10\} \cup \{2, 4, 8\}$
 $= \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로

$U - (A \cup B) = \{3, 5, 7, 9\}$

12. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \cup \emptyset = \emptyset$

④ $A \subset B, B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \cup \emptyset = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A \star B = B \star A$

㉡ $(A \star B) \star C = A \star (B \star C)$

㉢ $A^c \star B^c = A \star B$

㉤ $A \star A \star A = A$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

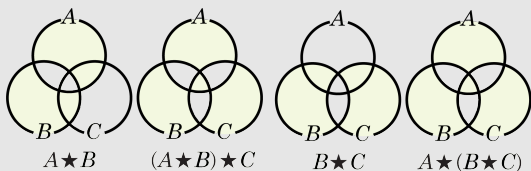
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

㉠ $A \star B = (A - B) \cup (B - A),$
 $B \star A = (B - A) \cup (A - B)$

$\therefore A \star B = B \star A$

㉡ 연산 $\star$ 은 두 집합의 합집합에서 교집합을 빼는 것이므로 벤다이어그램을 그려서 확인해 보면 결합법칙이 성립함을 알 수 있다.



㉢ $A^c \star B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= A \star B$

㉤ $A \star A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset,$

$A \star A \star A = \emptyset \star A = (\emptyset - A) \cup (A - \emptyset) = A$

$\therefore$ 모두 옳다.

14. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 를 $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ 인 두 집합 A, B 로 분할한다. 또 $f(A)$ 를 집합 A 의 원소의 총합, $f(B)$ 를 집합 B 의 원소의 총합이라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면?

① 5

② 10

③ 15

④ 25

⑤ 45

해설

$$S = \{1, 2, 3, 4\}, A \cup B = S, A \cap B = \emptyset \text{ 이므로, } f(A) + f(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore f(A) \cdot f(B) &= f(A)(10 - f(A)) \\ &= -\{f(A)\}^2 + 10f(A) \\ &= -\{f(A) - 5\}^2 + 25\end{aligned}$$

$\therefore f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 25

15. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

- ① $\sqrt{3}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.
- ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

‘비둘기집의 원리’를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을 때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해 보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

$$\text{대각선 길이} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다