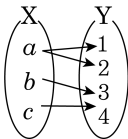
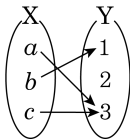


1. 다음 대응 중 함수인 것은?

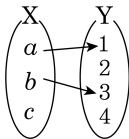
①



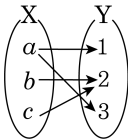
②



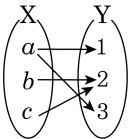
③



④



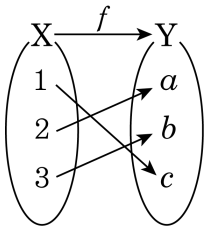
⑤



해설

집합 X 의 모든 원소 각각에 대하여 집합 Y 의 원소가 하나씩만 대응하여야 하므로 함수의 정의에 맞는 것은 ②번이다.

2. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a) + f^{-1}(c)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

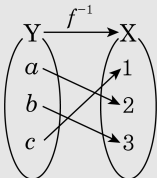
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$$f^{-1}(a) + f^{-1}(c) = 2 + 1 = 3$$

3. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

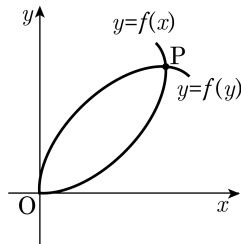
① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

③ $(1, 2)$

④ $(2, 2)$

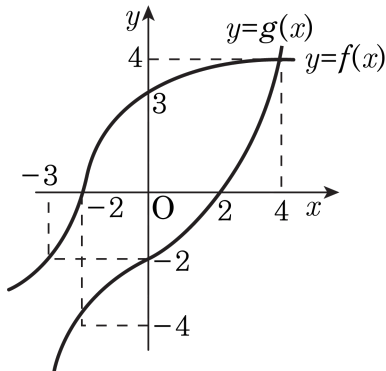
⑤ $(2, 3)$



해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의 교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로 $(2, 2)$ 이다.

4. 일대일대응인 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g \circ f^{-1})(3)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ 이므로

그래프를 이용하여 $f^{-1}(3)$ 의 값을 찾는다.

$f^{-1}(3) = a$ 라 하면 $f(a) = 3$

$\therefore a = 0$

$\therefore (g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(0) = -2$

5. $f : X \rightarrow Y$, $x \rightarrow f(x)$ 라 한다. X 의 임의의 두 원소를 a, b 라 할 때, 다음 중에서 f 가 일대일 함수일 조건은?

① $a = b$ 이면 $f(a) = f(b)$

② $f(a) = f(b)$ 이면 $a = b$

③ $f(a) \neq f(b)$ 이면 $a \neq b$

④ $a \neq b$ 이면 $f(a) = f(b)$

⑤ $a = b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$ 이면, $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

7. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개

② 25 개

③ 64 개

④ 81 개

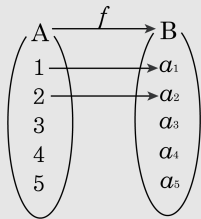
⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수

$f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



8. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -x^2 + x$ 에 대하여 $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$ 의 합숫값을 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -47

② -35

③ 12

④ 37

⑤ 47

해설

$$a = (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-2) = -5$$

$$b = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = -42$$

$$\therefore a - b = -5 - (-42) = 37$$

9. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16

② -14

③ -6

④ -4

⑤ -2

해설

$f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에서

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \textcircled{㉠}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \textcircled{㉡}\end{aligned}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$$

$$\therefore k = -16$$

10. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

11. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $(f^{-1})^{-1} = f$

② $g \circ f \neq f \circ g$

③ $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

④ $f \circ f^{-1} = I$

⑤ $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$$

즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

12. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\text{즉 } x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

13. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

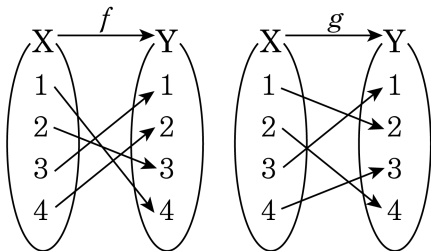
해설

$$f(f(x)) = 4x - 9, \quad f(f(f(x))) = 8x - 21 \quad \text{이므로}$$

$$4x - 9 = 8x - 21$$

$$\therefore x = 3$$

14. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\therefore g \cdot f^{-1}$$

$$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$$

$$= h \cdot I = h$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

$$\therefore g(4) = 3$$

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

16. 점 (2, 1)을 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x - 2) + 1 = mx - 2m + 1$ ($m \neq 0$) 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx - 2m + 1) - 2m + 1 = x$

$\therefore m^2x - 2m^2 - m + 1 = x$

즉, $m^2 = 1$, $-2m^2 - m + 1 = 0$ 이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x + 3$ 이고

$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$ 이다.

17. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수에 대하여 $f(x) = (x \text{를 } 3 \text{으로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 두 자리 자연수 x 의 개수는 29개이다.

㉢ 임의의 자연수에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 이다.

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

해설

㉠ $10 = 3 \times 3 + 1$ 즉 나머지 1

$\therefore f(10) = 1$

㉡ $f(x) = 2$ 를 만족하는 자연수는 x 를 3으로 나누면 나머지가 2 이므로 $x = 3n + 2$ (n 은 음이 아닌 정수)이고 두 자리수이므로

$$10 \leq 3n + 2 \leq 99, \text{ 즉 } 8 \leq 3n \leq 97, \frac{8}{3} \leq n \leq \frac{97}{3}$$

$\therefore n = 3, 4, 5, 6 \dots, 32$ 이므로 30개이다.

㉢ $x = 2$ 일 때, $f(2) = 2$ 이고 $f(2^2) = f(3 \times 1 + 1) = 1$ 이므로 $f(x) \neq f(x^2)$ 이다.

따라서, 옳은 것은 ㉠뿐이다.

18. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

19. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,

함수의 개수는 m 개,

일대일 대응 함수의 개수는 n 개,

상수 함수는 s 개,

항등함수는 r 개이다.

$m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

① 21

② 27

③ 33

④ 37

⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$

일대일 대응의 개수는

$3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지

$\therefore s = 3$

항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$

따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

20. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 8$

해설

$$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f \text{ 에서}$$

$$g = f \circ f \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\therefore 5a - 10 = 30$$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.