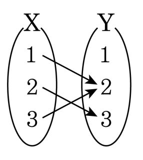
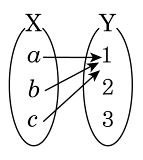
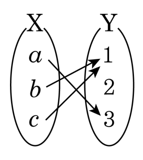
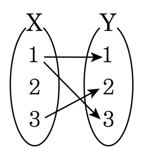
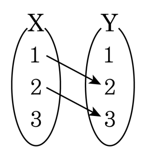
1. 다음 대응 중 X에서 Y로의 함수가 아닌 것을 모두 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

④ X의 원소 1에 대응되는 Y의 원소는 2개이고 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
⑤ X의 원소 3에 대응되는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

2. 다음 중 역함수가 존재하지 않는 것은?

① $y = x - 2$ ② $y = x^2$

③ $y = x^3$ ④ $y = x^2 - 2x$ (단, $x \geq 1$)

⑤ $y = |x - 1|$ (단, $x \geq 1$)

해설

일대일 대응이 아닌 것은 ②번이다.
그러므로 ②번 그래프는 역함수가 존재하지 않는다.

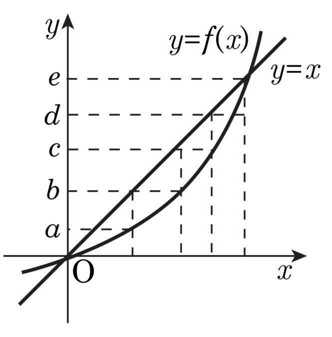
3. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

해설

$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면
$x = \frac{1}{2}y + 1$ x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는
$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + 1$

4. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \cdot f)^{-1}(b)$ 의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \cdot f)^{-1}(b) = (f^{-1} \cdot f^{-1})(b)$
$= f^{-1}(f^{-1}(b))$
$f^{-1}(b) = k$ 라고 하면, $f(k) = b$
$\therefore\ k = c$
$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$
또, $f^{-1}(c) = t$ 라고 하면, $f(t) = c$
$\therefore\ t = d$
$\therefore\ (f \cdot f)^{-1}(b) = d$

5. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

7. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

$a \rightarrow \boxed{}$, $b \rightarrow \boxed{}$, $c \rightarrow \boxed{}$

Y의 원소 p, q, r, s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p, q, r, s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(개)

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$
\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\
&= (h \circ g)(f(2)) \\
&= (h \circ g)(4) \\
&= 3 \times 4 + 4 = 16
\end{aligned}
$$

9. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$
$=2ax+4\ \cdots$ ㉠
$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$
$=2ax+6a-1\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

10. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서
$f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$이므로
$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

11. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5)=-2$, $(f \circ f)(x)=x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5)=f(5)=-2$

12. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|,\ g(x) = x$

㉡ 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때 $f(x) = x,\ g(x) = x^3$

㉢ $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ g(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉡　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-1) = 1,\ g(-1) = -1$ 이므로 $f \neq g$
㉡ $f(-1) = g(-1) = -1,\ f(0) = g(0) = 0,$
　$f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$
㉢ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2$인 모든 실수$\}$ 이고
　$g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq \pm 2$인 모든 실수$\}$ 이므로 $f \neq g$
따라서 $f = g$ 인 것은 ㉡ 뿐이다.

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

14. $f(x) = 2x - 3$일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$를 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9,\quad f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로

$4x - 9 = 8x - 21$

$\therefore\ x = 3$

15. 함수 $f(x)$가 $f(3x+1)=2x-1$을 만족할 때, 함수 $f(x)$ 를 구하면?

① $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$ ② $f(x)=\dfrac{3x+1}{2}$ ③ $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$
④ $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$ ⑤ $f(x)=\dfrac{2x+3}{3}$

해설

$f(3x+1)=2x-1$에서 $3x+1=t$ 라고 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{3}$ 이므로

$\therefore\ f(t)=2\cdot\dfrac{t-1}{3}-1=\dfrac{2t-5}{3}$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b+1=3$

$\therefore\ b = 1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0,\ f^{-1}(a) = -1$

$\therefore\ f(-1) = a$

$\therefore\ a = 1-(-1)^2 = 0$

17. 집합 $X = \{-1,\ 1, -i,\ i\}$ 에 대하여 $f\ :\ X \to Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

18. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, ...)$
(ii) $f(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 16　　⑤ 32

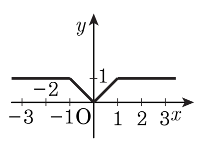
해설

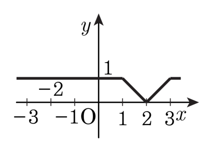
$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

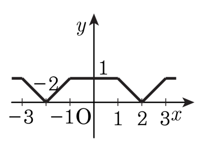
$$\begin{aligned} f(2^8 \cdot 5) &= f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5) \\ &= f(2 \cdot 2 + 1) \text{이므로,} \end{aligned}$$

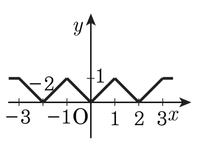
$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$

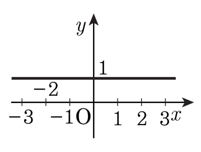
19. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


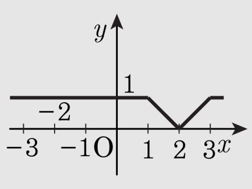
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$g(x) = x - 2$ 에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



20. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 + x$, $f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은 ?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$f^{-1}(2) = c$ 라 하면 $f(c) = 2 \rightarrow c^2 + c = 2$

$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c-1)(c+2) = 0$

$c > 0$ 이므로 $c = 1$

$\therefore\ f^{-1}(2) = 1$

$f(x)g(x) = x + 2$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(1)g(1) = 3$

$(1^2 + 1)g(1) = 3$

$\therefore\ g(1) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ (g \circ f^{-1})(2) &= g\left\{f^{-1}(2)\right\} \\ &= g(1) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$