1. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

2. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

3. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$　　② $\sqrt{x+1} \le \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$　　④ $\sqrt{x+1} \ge \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 = (x+1) - (y+1)$$
$$= x - y > 0$$
$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

5. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A와 B의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

8. 다음 중 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c는 전체집합 U에 대한 A의 여집합)

① $A = B$　　② $B \subset A$　　③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$　　⑤ $A \cup B = \varnothing$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$
따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$와 $B - A$는 서로소이므로 $A - B = \varnothing$ $\therefore A \subset B$