

1. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3 + 2 + 1 = 6$

2. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$x + 2y \text{의 최댓값 } M = 5, \text{ 최솟값 } m = -5$$

$$\therefore M + m = 5 + (-5) = 0$$

3. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$

② $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

④ $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$$

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\
 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\
 &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2 \\
 &\text{그런데 } |a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \text{ 이므로} \\
 &|a| + |b| \geq |a + b| \text{ (단, 등호는 (} \quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 (} \quad \text{㉢} \quad) \text{ 일 때, 성립)}
 \end{aligned}$$

- ① $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$
 ② $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$
 ③ $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$
 ④ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$
 ⑤ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned}
 \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\
 &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\
 &= 2(|ab| - ab) \\
 \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\
 &\Rightarrow |ab| = ab \\
 \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다}
 \end{aligned}$$

5. $x + y = 3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서 $x = y = \frac{3}{2}$ 일 때, xy 의 최댓값 $\frac{9}{4}$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A^c = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.



답 :

조건



정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$

r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$

$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$

그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.

8. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합)

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$
따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$
가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$
는 서로소이므로 $A - B = \emptyset \therefore A \subset B$