1. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4 는 12 의 약수이다.
② $x+y=10$ 이다.
③ $|-3|=-3$
④ $x=2$ 일 때, $x-1>0$
⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참
따라서 명제는 ①, ③, ④

2. 집합 $S=\{(x,\ y)|ax+by+5=0\}$에 대하여 $(1,\ 7)\in S$, $(-4,\ -3)\in S$ 일 때 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$(1,\ 7)\in S$ 이므로

$a+7b+5=0\cdots$ ㉠

$(-4,\ -3)\in S$ 이므로

$-4a-3b+5=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-2$

3. 집합 $A = \{0, \{1\}, 1, 2\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\varnothing \subset A$ ② $\{1\} \in A$ ③ $\{1\} \subset A$
④ $\{1, 2\} \in A$ ⑤ $\{\{1\}, 1\} \subset A$

해설

④ $\{1, 2\} \subset A$

4. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 3의 약수$\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$

㉢ $0 \in \varnothing$

㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의배수$\}$

㉤ $\varnothing \subset \{1\}$

㉥ $\varnothing \subset \varnothing$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$를 써야 한다.
㉢ $0 \in \varnothing$에서는 $\varnothing \subset \{0\}$이어야 한다.
㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의 배수$\}$에서는 $\subset$를 써야한다.
㉥ 공집합$(\varnothing)$은 모든 집합의 부분집합이다.

5. 다음 중 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 인 것은?

① $A = \{1,\ 2,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 6\}$

② $A = \varnothing$, $B = \left\{x \mid x\text{는 } 1 \text{ 이하의 자연수}\right\}$

③ $A = \{3,\ 4,\ 5\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 } 3\text{보다 크고 } 5\text{보다 작은 자연수}\right\}$

④ $A = \left\{x \mid x\text{는 } 10\text{보다 작은 홀수}\right\}$,
$B = \left\{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\right\}$

⑤ $A = \left\{x \mid x\text{는 } 20\text{의 약수}\right\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 } 20 \text{ 미만의 } 5\text{의 배수}\right\}$

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
따라서 보기 중 집합A 와 집합B 가 같은 것을 찾으면
④ $A = B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 이다.

6. 집합 $A = \{x \mid x$는 20 이하의 홀수$\}$의 부분집합 중에서 원소 1, 15 는 반드시 포함하고, 소수는 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 19\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 15는 반드시 포함하고, 소수 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19는 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{10-2-7} = 2^1 = 2$ (개)

7. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 의 부분집합 중에서 n 을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$2^{(n\text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-1} = 32 = 2^5 \quad \therefore n = 6$

8. $U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $A = \{1,\ 3,\ 5\}$, $B = \{3,\ 5,\ 9\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 포함하는 U 의 부분집합의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$U = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$A = \{1,\ 3,\ 5\}$, $B = \{3,\ 5,\ 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{3, 5\}$ 이다.

3, 5 를 포함하는 U 의 부분집합의 개수는

$2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

9. 세 집합 A, B, C 가 $(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) = \varnothing$ 을 만족시킬 때, $A \cap (B-C)^c = B$ 를 간단히 하면?

① $A \cap B$ ② $B \cup C$ ③ $A^c \cup C$

④ $A = B$ ⑤ $A - B = C$

해설

$(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) = \varnothing$ 이면 $A - B = \varnothing$, $B - C = \varnothing$, $C - A = \varnothing$ 이므로 $A = B = C$ 이다.

따라서 $A \cap (B-C)^c = A \cap \varnothing^c = A = B$

$\therefore A = B$ 또는 $A - B = \varnothing$

10. 자연수 N의 배수의 집합을 A_N이라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$을 만족하는 a의 최솟값을 m , $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$을 만족하는 b의 최댓값을 M이라 할 때, $M - m$의 값은?

① -10　② 28　③ 14　④ 10　⑤ -14

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12(\because\ 4, 6$ 의 $L.C.M)$
$(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 2\ (\because\ 4, 6$ 의 $G.C.D)$
$\therefore\ M - m = -10$

11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 60$, $n(A) = 36$, $n(A \cap B) = 11$, $n(A^c \cap B^c) = 14$일 때, $n(B)$를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 14$,
$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 60 - 14 = 46$,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
$46 = 36 + n(B) - 11$
$\therefore\ n(B) = 21$

12. 다음 중 조건 '$x < 0$ 이고 $x^2 = 1$' 의 부정은?

① $x > 0$ 이고 $x^2 \neq 1$

② $x > 0$ 또는 $x^2 \neq 1$

③ $x \geq 0$ 이고 $x^2 \neq 1$

④ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)

⑤ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 또는 $x \neq -1$)

해설

'$x < 0$ 이고 $x^2 = 1$' 의 부정

$\Rightarrow x \geq 0$ 또는 $x^2 \neq 1$

$\Rightarrow x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)

13. 다음 <보기>의 조건 '$p(x)$ '를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

(1) $p(x)$: x는 12의 양의 약수이다.
$P=\{1,2,3,6,12\}$
(2) $p(x): x^2+1=0$
$P=\varnothing$
(3) $p(x): x^2-5x-4=0$
$P=\{1,4\}$
(4) $p(x): x^2+4x+5>0$
$P=R$

① (1), (2)　② (2), (3)　③ (3), (4)
④ (2), (4)　⑤ (1), (3)

해설

(1) $p=\{1,2,3,4,6,12\}$
(2) $x^2\geq 0$ 이므로 $x^2+1\neq 0$ $\therefore P=\varnothing$
(3) $P=\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$
(4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ 이므로 $P=R$ 이다.

14. 다음 <보기>의 명제 중 참인 명제의 개수를 구하면?

보기

㉠ 소수이면 홀수이다.

㉡ $ab \neq 6$ 이면 $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$ 이다.

㉢ 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이다.

㉣ 실수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $ac = bc$ 이면 $a = b$ 이다.

㉤ $x^2 = 4$ 이면 $x = 2$ 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ 짝수인 소수도 있다.
㉡ 대우명제 '$a = 2$ 이고 $b = 3$ 이면 $ab = 6$ 이다.' 는 참이므로 주어진 명제는 참이다.
㉢ $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
따라서 $|a| + |b| = 0$ 이다.
㉣ $c = 0$ 이면 $ac = bc$ 이지만 $a = b$ 인 것은 아니다.
㉤ $x^2 = 4$ 이면 $x = \pm 2$ 이다

15. 명제 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 이면 a, b, c 중에 서로 같은 두 수가 있다.' 의 대우는?

① $a=b=c$ 이면 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 이다.

② $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이면 $a,\ b,\ c$ 가 모두 서로 다른 수이다.

③ a, b, c 가 모두 서로 다른 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.

④ a, b, c 가 모두 서로 같은 수이면$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.

⑤ $a \neq b \neq c$ 이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.

해설

'$a,\ b,\ c$ 중에 서로 같은 두 수가 있다.' 이면 '$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $a=c$ ' 이므로 이것의 부정은 '$a \neq b$ 이고 $b \neq c$ 이고 $a \neq c$ ' 이다. 즉, '$a,\ b,\ c$ 는 모두 서로 다른 수이다. '
또, $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 의 부정은 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이므로 주어진 명제의 대우는 '$a,\ b,\ c$ 가 모두 서로 다른 수이면 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 이다.'

16. 다음 부등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a|+|b| \ge |a+b|$

② $a \ge b > 0$일 때 $\dfrac{b}{2+a} \ge \dfrac{a}{2+b}$

③ $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc(a>0, b>0, c>0)$

④ $\sqrt{3}+\sqrt{13} > \sqrt{2}+\sqrt{14}$

⑤ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

해설

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b} = \frac{2b+b^2-2a-a^2}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{b^2-a^2+2(b-a)}{(2+a)(2+b)}$$

$$= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)}$$ 에서

$(a+2)(b+2)>0$이고

$(b-a) \le 0$, $a+b+2>0$이므로

$(\because a \ge b > 0)$

$$\frac{b}{2+a}-\frac{a}{2+b} \le 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \le \frac{a}{2+b}$$

17. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

> $\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \ge 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}=\frac{4}{\sqrt{xy}}\cdots$㉠
> $\therefore\ \sqrt{xy} \ge 4\cdots$㉡
> $\therefore\ x+y \ge 2\sqrt{xy} \ge 2\cdot 4 = 8\cdots$㉢
> 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots$㉣

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는

$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $y=4x$일 때이고,

㉢ 에서 등호가 성립하는 경우는

$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.

따라서, $x+y$의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

18. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

19. 다음은 집합 $A=\{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?

① 5, 31　② 6, 63　③ 7, 127
④ 8, 255　⑤ 9, 511

해설

$A=\{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로 원소의 개수는 8 개이다.
(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) − 1
이므로 부분집합의 개수는 $2^8=256$이고
진부분집합의 개수는 $256-1=255$ (개)이다.

20. $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합 중에서 a 또는 d 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하면?

① 4 개　② 8 개　③ 10 개　④ 12 개　⑤ 24 개

해설

(i) a 을 포함하는 경우

$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)

(ii) d 를 포함하는 경우

$2^{5-1} = 16$ (개)

(i) a 와 d 를 모두 포함하는 경우

$2^{5-2} = 8$ (개)

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

21. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $B = \{5,\ 9,\ 14\}$ 이고 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $X \subset A$

② $X \subset (A \cap B)$

③ $\{5, 9\} \subset X$

④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset B$

해설

$A \cap X = X$ 일 때 $X \subset A$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

② $(A \cap B) \subset X$ 이므로 옳지 않다.

③ $A \cap B = \{5,\ 9\}$ 이므로 $\{5,\ 9\} \subset X$ 이다.

⑤ $(A \cap B) \subset X \subset A$ 이지만 $X \subset B$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이라고 할 수 없다.

22. 집합 $A=\left\{x|x\text{는 } 18\text{의 약수}\right\}$, $B=\left\{x|x\text{는 } 12\text{의 약수}\right\}$ 에 대하여 $(A\cup B)\cap X=X$, $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구한 것은?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

$A=\{1,2,3,6,9,18\}$, $B=\{1,2,3,4,6,12\}$
$A\cap B=\{1,2,3,6\}$
$A\cup B=\{1,2,3,4,6,9,12,18\}$

$(A\cup B)\cap X=X$ 이므로 $X\subset(A\cup B)$
$(A\cap B)\cup X=X$ 이므로 $(A\cap B)\subset X$
$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$
X 는 원소 1, 2, 3, 6 을 포함하는
$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ 의 부분집합이므로
(집합 X의 갯수) $\equiv 2^{8-4}=2^4=16$(개)

23. 전체집합 $U = \left\{3 \times x + 1 | x < 10,\ x \text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.
$A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$U = \{3 \times x + 1 | x < 10$, x 는 자연수$\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\}$,
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\}$,
전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
$A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.
$\therefore n(A \cap B) = 4$

24. 두 집합 $A = \left\{x \mid x\text{는 } 20\text{의 약수}\right\}$, $B = \{2, 4, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - B$ 라고 할 때, $(A * B) * B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1,\ 5,\ 20\}$

해설

$B \subset A$ 이므로 $A * B = A - B$

$(A * B) * B = ((A - B) \cup B) - B = A - B$

$\therefore\ A - B = \{1, 5, 20\}$

25. 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 의 두 부분집합 $A = \{7, 19\}$, $B = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$A \cup X = X,\ X \cap (B - A) = \{5,\ 11\}$

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = X$ 이므로 $A \subset X$
$\therefore$ 7, 19 는 X 의 원소
$B - A = \{3, 5, 11, 13\}$ 이고
$X \cap (B - A) = \{5, 11\}$ 이므로
5, 11 은 X 의 원소이고 3, 13 은 X 의 원소가 아니다.
따라서 X 는 5, 7, 11, 9 를 포함하고 3, 13 은 포함하지 않는 전체집합 U 의 부분집합이므로
$2^{8-4-2} = 2^2 = 4$(개)

26. 전체집합 $U = \left\{x | x\text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\right\}$ 의
세 부분집합 $A = \left\{x | x\text{는 } 8 \text{ 이하의 홀수}\right\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$
가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$
이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

① $\{1, 3\}$　② $\{1, 5\}$　③ $\{1, 7\}$
④ $\{1, 2, 5\}$　⑤ $\{1, 2, 6, 7\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
$X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
$A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

27. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다. 이때, 수학도 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 14 명

해설

수학을 좋아하는 학생의 수 : $n(A) = 33$,
영어를 좋아하는 학생의 수 : $n(B) = 30$
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29$,
$n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17$,
$n(A \cup B) = 46$
$\therefore\ n(U) - n(A \cup B) = 14$ (명)

28. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로
> $a^2+b^2=3m+$[㉠], $c^2=3n+$[㉡]
> $\therefore$ $a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참　② 1, 2, 거짓　③ 2, 1, 참
④ 2, 0, 참　⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1, b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore$ [㉠] $=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수) 의 꼴이다.
$\therefore$ [㉡] $=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore$ [㉢] $=$ 참

29. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

30. 두 조건 $p : x \le 3 - a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$ ② $a > 7$ ③ $a > 3$

④ $a > -1$ ⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \rightarrow \sim q$ 의 대우명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3 - a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3 - a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

31. 두 조건 p_n, $q_n(n = 1,\ 2)$에 대하여 $P_n = \{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, $Q_n = \{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1,\ P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

32. 다음의 Ⅰ, Ⅱ에서 p가 q이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

Ⅰ. p : $ab < 0$ q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$이 동시에 성립한다. Ⅱ. p : $a + b - 1 < 0$ q: 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖는다.

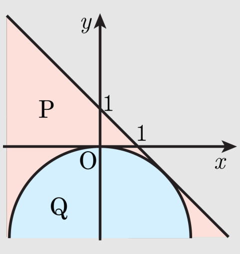
a, b가 실수일 때, Ⅰ, Ⅱ에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

Ⅰ. q의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는



$a - b > 0$이고 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$에서 $ab < 0$이고

$a > b$이므로

$a > 0$, $b < 0$

역으로, $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이고

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0$, $b < 0$이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0,\ b > 0)$ 또는 $(a > 0,\ b < 0)$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$D = a^2 + 4b < 0$, $P = \{(a,\ b) | a + b - 1 < 0\}$

$Q = \{(a,\ b) | a^2 + 4b < 0\}$라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$

따라서, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.

33. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$이므로

$$(\text{준식})=8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$$

$x+y+z=1$이므로

$$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\quad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(\text{준식})\geq 8+36+81=125$