1. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　② -4　③ 2　④ 8　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$
\begin{array}{c|cccll}
1 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & 3 & 5 & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 3 & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow \mathrm{c} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

2. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

3. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

4. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

5. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

6. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 있다.

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$

두 삼차다항식을 $x^2 - 1$로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$의 값은?

① -3998 ② -1999 ③ 0

④ 1999 ⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$로 놓으면

$H(x)$는 $x^2 - 1$로 나누어떨어지므로

$H(x) = 2x^3 + (a-c)x^2 + (b-d)x + 3998$

$\quad = (x^2 - 1)(2x - 3998)$으로 놓을 수 있다.

($\because$ x^3의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$로 나눈 몫은 $2x - 3998$이다.)

$\therefore P(1999) - Q(1999)$

$= H(1999)$

$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$

$= 0$

7. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0　　② 1

③ r_1　　④ $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$

⑤ $r_1r_2\cdots\cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\
&= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\
&= (x-1)^2f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^3f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-1)^nf_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+\cdots\cdots \\
&\qquad +r_2(x-1)+r_1
\end{aligned}$$

$$R(x) = r_n(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+r_2(x-1)+r_1$$

$$\therefore\ R(2) = r_n+r_{n-1}+\cdots\cdots+r_2+r_1$$

8. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2이다. 다항식 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 적은 것은?

① $2xQ(x)-2,\ -1$ ② $2xQ(x)-1,\ -1$
③ $\frac{1}{2}xQ(x)-2,\ 1$ ④ $\frac{1}{2}xQ(x)-1,\ 1$
⑤ $\frac{1}{2}xQ(x)+1,\ 2$

해설

$$f(x) = (2x-1)Q(x)-2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)2Q(x)-2$$

$$\begin{aligned} xf(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2x \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)2xQ(x)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)-2\}-1 \end{aligned}$$