1. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

2. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 x, y, z의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

x, y, z에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

3. 다항식 $f(x)$를 $(x+3)(x-6)$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$이었다. $f(x)$를 $(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x)=(x+3)(x-6)Q(x)+x-2$이므로
$f(-3)=-5$

4. $(x^3-x^2-2x+1)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{15}\cdots$㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}\quad\cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2=2\,(a_0+a_2+\cdots+a_{14})$이다.

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots a_{14}=1$

5. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$
$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$
$-a+b=-3,\ 3a+b=5$
$a=2,\ b=-1$
$\therefore\ ax+b=2x-1$

6. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$
$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$
$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$㉠
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$
㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$
$\therefore\ Q(1)=2$

7. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	$9a+b+24$

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$ 이므로

$k=3$, $c=3$, $a=1$, $d=12$, $b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

8. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

9. $f(x)=3x^3-x+2$ 일 때, $f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$이다. 이 때, $A+B+C+D$의 값을 구하면 ?

① 4 ② 14 ③ 24 ④ 34 ⑤ 44

해설

$f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$f(2)=A+B+C+D$ 이므로
$f(2)$를 구하기 위해서는
$f(x)=3x^3-x+2$ 에 $x=2$ 를 대입하면
$f(2)=3\times 2^3-2+2=24$

해설

$x+1=t$ 라 하면,
$f(t)=A(t-1)^3+B(t-1)^2+C(t-1)+D$

1	3	0	−1	2
		3	3	2
1	3	3	2	4
		3	6	
1	3	6	8	
		3		
	3	9		

$\therefore\ A=3,\ B=9,\ C=8,\ D=4$
$\therefore\ A+B+C+D=24$

10. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n+n\alpha x^{n-1}+\cdots+\alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$(단, $a_n\neq 0$)라고 놓으면
$f(x+1)-f(x-1)$
$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}+\cdots+a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
$=\boxed{\quad}x^{n-1}+\cdots=6x^2+6$
에서 $n=3$, $a_n=1$
$\therefore\ f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+1$
$f(x+1)-f(x-1)=6x^2+4a_2x+2+2a_1$
이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x)=x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{\quad}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$=a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$=a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\}+a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$
$=a_n(2nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$
$=2na_nx^{n-1}+\{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1}=6x^2$에서
$n-1=2$, $2na_n=6$
$\therefore\ n=3$, $a_n=1$