

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. 점 $(1, 2)$ 를 중심으로 하고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

② $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

④ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$

⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 이 $(3, -2)$ 를 지나므로

$(3 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 20$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

3. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

4. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

5. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= 26 \\ \text{중심 : } (-4, 3) \\ \therefore (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= r^2, \\ (0, 0) \text{을 지나므로} \\ r &= 5 (\because r > 0)\end{aligned}$$

6. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 의 반지름의 길이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 = 2^2 \end{aligned}$$

7. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$

② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

8. 임의의 실수 a 에 대하여 원 $x^2 + y^2 + ax + (a+2)y - (2a+4) = 0$ 은 두 점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

② $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

④ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

해설

$$x^2 + y^2 + ax + (a+2)y - (2a+4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - 4 + a(x+y-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0 \dots\dots\dots ①$$

$$\text{이고 } x+y-2=0 \dots\dots\dots ②$$

② 에서 $y = -x + 2$ 를 ① 에 대입하면

$$x^2 + (-x+2)^2 + 2(-x+2) - 4 = 0 \text{ 이를 정리하면}$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 0, x = 1, y = 1$$

$$\therefore A(2, 0), B(1, 1)$$

$$\therefore A, B \text{ 의 중점의 좌표} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

9. 두 점 A(1, 2), B(-1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

④ $x^2 + (y-3)^2 = 2$

⑤ $x^2 + y^2 = 2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (0, 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2$

10. 두 점 A (-3, 8), B (7, -4) 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ ② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$ ④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$

⑤ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면

C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8-4}{2} \right)$$

$\therefore C (2, 2)$

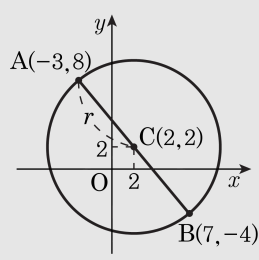
반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$$



11. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 = 4$

③ $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

⑤ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0)이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (-1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

12. 두 점 $(-2, 1)$, $(6, 5)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 15 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

해설

i) 원의 중심은 두 점의 중점과 같다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = (2, 3)$$

ii) 반지름 길이는 중심과 한 점 사이의 거리와 같 다.

$$\Rightarrow \sqrt{(2-6)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \text{원의 방정식은 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$$

13. 세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$

② $(-2, 3)$

③ $(2, -3)$

④ $(-2, -3)$

⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1, 1)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ 이라 하면}$$

이 원이 세점을 지나므로

$$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$$

$$\therefore a - b - c = 2 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$6^2 + 6a + c = 0$$

$$\therefore 6a + c = -36 \cdots \cdots \textcircled{C}$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 6, c = -12$$

즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로

표준형으로 나타내면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

14. 세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ (단, $r > 0$) 라고 할 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ 은
 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 이다.
 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 을 정리하면
 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 이다.
따라서 $a = 1$, $b = 0$, $r = 1$ 이므로
 $a + b + r = 2$ 이다.

15. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면,

$\textcircled{1}$ 은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4$, $B = -2$, $C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

16. 세 점 A(2, 1), B(-4, 3), C(-1, -3) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 의 외심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 를 구하면?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ -1 ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O 라하면

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다.

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$$

$$\Rightarrow 3a - b = -5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2}$$

$$\Rightarrow 6a + 8b = -5 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 를 연립하면,

$$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -1$$

17. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 A(1, -1), B(3, 5) 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
구하는 원의 방정식의 중심을 (a, a) ,
반지름을 r 라고 하면,
 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$
이것이 A(1, -1), B(3, 5)를 지나므로
 $(1 - a)^2 + (-1 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$
 $(3 - a)^2 + (5 - a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면, $16a - 32 = 0 \quad \therefore a = 2$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면, $r^2 = 10$
 $\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
 $\therefore$ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

18. 중심 C 가 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 두 점 $(2, 1)$, $(6, 5)$ 를 지나는 원의 면적은?

- ① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

해설

구하는 원을
 $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \dots\dots ①$ 라 두면
①은 $(2, 1)$, $(6, 5)$ 를 지나므로
 $4 + 1 + 4A + 2B + C = 0 \dots\dots\dots ②$
 $36 + 25 + 12A + 10B + C = 0 \dots\dots\dots ③$
또한 ①의 중심은 $(-A, -B)$ 이므로
 $-B = 2 \cdot (-A) + 1 \dots\dots\dots ④$
②, ③, ④에서 $A = -2$, $B = -5$, $C = 13$ 이고
①의 반지름의 길이는 $\sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16}$
구하는 원의 면적은 16π

해설

중심 $C(a, 2a + 1)$ 이라 하면
 $(x - a)^2 + (y - 2a - 1)^2 = r^2$
 $(2, 1)$, $(6, 5)$ 를 지나므로 각각 대입하면
 $(2 - a)^2 + (1 - 2a - 1)^2 = r^2 \dots ①$
 $(6 - a)^2 + (5 - 2a - 1)^2 = r^2 \dots ②$
①, ②를 연립해서 풀면 $a = 2$, ①에 대입하면 $r = 4$

19. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6, 2)$ 를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2

② 5

③ 7

④ 14

⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a, a + 3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2$$

이 원이 $(6, 2)$ 를 지나므로

$$(6 - a)^2 + (a + 1)^2 = (a + 3)^2 \text{ 에서}$$

$$(a - 2)(a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2, 14$$

원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

20. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
- ② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
- ③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
- ④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$