1. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q이기 위한 필요조건, r 은 q이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요　　② 충분

③ 필요충분　　④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

2. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

3. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설
$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로
$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$
$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

4. 다음에서 조건 p가 조건q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,a, b 는 실수)

㉠ p : $A \cup B = B$, q : $A \subset B$

㉡ p :$a^2 + b^2 = 0$, q : $a = 0$ 이고 $b = 0$

㉢ p :$a^2 = b^2$ q : $a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$

$\therefore$ p는 q이기 위한 필요조건

5. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

6. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

7. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ a \le -1$
또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ b \ge 3$
따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

8. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

9. 다음은 $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

> $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
> (증명)
> $\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
> $= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
> $\therefore\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
> 그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
> $\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

10. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 또는 $y \ge 0$

② $x + y \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 이고 $y \ge 0$

③ $x \ge y$ 이면 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$

④ $x \le 2$ 이면 $|x-1| \le |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = -1$ 일 때,
$xy = 2 \ge 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = 3$ 일 때,
$x + y = -2 + 3 \ge 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x = 2,\ y = -2$ 일 때,
$2 \ge -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \le |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2 - 2x + 1 \le x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \le 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

11. 두 조건 p, q가 $p\ :|x| < a$, $q\ :|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$　　② $a > 4$　　③ $a \geq 4$

④ $a > 2$　　⑤ $2 \leq a \leq 4$

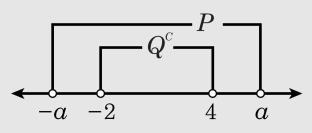
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P = \{x | -a < x < a\}$

$Q = \{x | x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

12. 두 조건 $p : a-4 < x \le a+5$, $q : |x| \le 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 q : $-1 \le x \le 1$ 에서 $a+5 \ge 1$, $a-4 < -1$

따라서 $a \ge -4$, $a < 3$ 이다.

즉, $-4 \le a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

13. 두 조건 p_n, $q_n(n=1,\ 2)$에 대하여 $P_n=\{x|x$는 p_n을 만족한다.$\}$, Q_n $=\{x|x$는 q_n을 만족한다.$\}$ 이고, p_1 은 p_2이기 위한 필요조건, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $P_1 \cap P_2 = P_2$　　② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1$　　④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1$

해설

p_1 은 P_2이기 위한 필요조건이므로 $P_1 \supset P_2$, q_n 은 p_n이기 위한 충분조건이므로 $P_1 \supset Q_1,$ $P_2 \supset Q_2$

① $P_1 \cap P_2 = P_2$

② $P_1 \cap Q_1 = Q_1$

③ $(P_1 \cup Q_1) \cup P_2 = P_1 \cup P_2 = P_1$

④ $(P_1 \cup Q_1) \cap P_2 = P_1 \cap P_2 = P_2$

⑤ $(P_1 \cap Q_1) \cup Q_2 = Q_1 \cup Q_2 \neq Q_1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14. 네 개의 명제 p, q, r, s가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \to q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$
㉢ $\sim s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$	㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s$

① p ② p, q ③ q, r
④ p, q, r ⑤ p, q, r, s

해설

㉡ $\sim r$ 그리고 $p \to \sim q \Leftrightarrow q \to r$ 또는 $\sim p$
㉣ $\sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
㉢, ㉣에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. ㉠에서 p 가 참이면 q가 참이고 ㉡에서 q 가 참이면 r도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) ㉢에서 대우가 참이므로 s도 참이다.
$\therefore$ p, q, r, s 모두 참이다.

15. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

㉠ $p : xy = |xy|,\ q : x > 0,\ y > 0$

㉡ $p : xy + 1 > x + y > 2,\ q : x > 1,\ y > 1$

㉢ $p : xy = 0,\ q : |x - y| = |x + y|$

㉣ $p : |x| + |y| > |x + y|,\ q : x + y \geq 2$

㉤ $p : x \geq 1,\ y \geq 1,\ q : x + y \geq 2$

㉥ $p : x + y = 0,\ xy = 0,\ q : x = 0,\ y = 0$

㉦ $p : x + y\sqrt{2} = 0,\ q : x = y = 0$ (x, y는 유리수)

㉧ $p : |x| = |y|,\ q : x^2 = y^2$

① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

㉡ ㉢ ㉥ ㉦ ㉧