

1. 이차방정식 $3x^2 - 9x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$

② $\alpha^2 + \beta^2 = 5$

③ $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{3}{5}$

④ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{5}{9}$

⑤ $(\alpha - \beta)^2 = \frac{3}{7}$

해설

근과 계수의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{3}{5}$$

2. 이차방정식 $x^2 + bx + a + 1 = 0$ 의 근이 $-4, -1$ 일 때, $ax^2 - bx - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 근이 $-4, -1$ 이므로

$$(x + 4)(x + 1) = 0$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$a = 3, b = 5$$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\therefore \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

3. 이차방정식 $7\left(x + \frac{1}{6}\right) + 3 = 6\left(x + \frac{1}{6}\right)^2$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta = \frac{m}{n}$ (단, m, n 은 서로소) 이다. $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha > \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x + \frac{1}{6} = t \text{ 라 하면 } 6t^2 - 7t - 3 = 0$$

$$(3t + 1)(2t - 3) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } t = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{5}{6}$$

$$\therefore m + n = 5 + 6 = 11$$

4. 어떤 자연수에 2를 더하여 제곱해야 할 것을 잘못하여 2를 더하여 2배 하였더니 48만큼 작아졌다. 어떤 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

어떤 자연수를 x 라고 하면

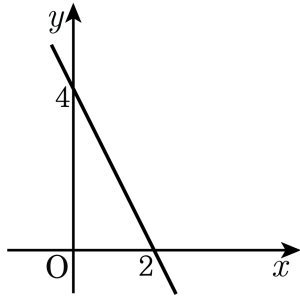
$$(x+2)^2 = 2(x+2) + 48$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x-6)(x+8) = 0$$

x 는 자연수이므로 $x = 6$ 이다.

5. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



- ① 2 ② -2 ③ $\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$
 $\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$
 두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.
 이차방정식의 두 근을 α , β 라고 하면,
 두 근의 차 $|\alpha - \beta|$ 는
 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
 $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$ 이므로
 두 근의 차는
 $\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

6. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 만족시키는 실근을 p, q 라 할 때 $(p-q)^2 \neq 0$ 이 성립한다. 실수 x 에 대하여 이차방정식 $bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 의 해의 개수와 이차방정식 $x^2 + 2(a+c)x + 6(ac-a^2) + b^2 = 0$ 의 해의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(p-q)^2 \neq 0$ 에서 $p-q \neq 0, p \neq q$ 이므로 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D = b^2 - 4ac > 0 \dots \textcircled{1}$$

$bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a-2c)^2 + b^2 \\ &= a^2 - 4ac + 4c^2 + b^2 \\ &= a^2 + 4c^2 + b^2 - 4ac \end{aligned}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $b^2 - 4ac > 0$ 이고 $a^2 + 4c^2 \geq 0$ 이므로 $a^2 + 4c^2 + b^2 - 4ac > 0$

따라서 $bx^2 + 2(a-2c)x - b = 0$ 은 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

$x^2 + 2(b+c)x + 6(bc-a^2) = 0$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+c)^2 - 6(ac-a^2) + b^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - 6ac + 6a^2 + b^2 \\ &= b^2 - 4ac + c^2 + 7a^2 \end{aligned}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $b^2 - 4ac > 0$ 이고 $c^2 + 7a^2 \geq 0$ 이므로

$$b^2 - 4ac + c^2 + 7a^2 > 0$$

따라서 $x^2 + 2(a+c)x + 6(ac-a^2) + b^2 = 0$ 은 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 두 이차방정식의 근의 개수의 합은 4