1. 이차방정식 $3x^2 - 9x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$

② $\alpha^2 + \beta^2 = 5$

③ $\dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{3}{5}$

④ $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{5}{9}$

⑤ $(\alpha - \beta)^2 = \dfrac{3}{7}$

해설

근과 계수의 관계로부터

$\alpha + \beta = 3,\ \alpha\beta = \dfrac{5}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{3}{5}$

2. 이차방정식 $x^2+bx+a+1=0$ 의 근이 $-4,\ -1$ 일 때, $ax^2-bx-2=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 근이 $-4,\ -1$ 이므로

$(x+4)(x+1)=0$

$x^2+5x+4=0$ 에서

$a=3,\ b=5$

$3x^2-5x-2=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로

$\therefore\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}$

3. 이차방정식 $7\left(x+\frac{1}{6}\right)+3=6\left(x+\frac{1}{6}\right)^2$의 두 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta=\frac{m}{n}$(단, m, n은 서로소) 이다. $m+n$의 값을 구하여라. (단, $\alpha>\beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$x+\frac{1}{6}=t$라 하면 $6t^2-7t-3=0$

$(3t+1)(2t-3)=0$

$t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

$\therefore x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{5}{6}$

$\therefore m+n=5+6=11$

4. 어떤 자연수에 2를 더하여 제곱해야 할 것을 잘못하여 2를 더하여 2배 하였더니 48만큼 작아졌다. 어떤 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

어떤 자연수를 x라고 하면

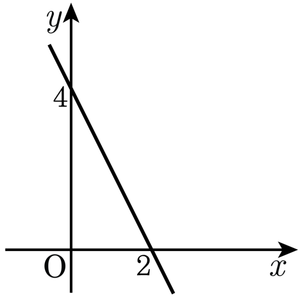
$(x+2)^2 = 2(x+2)+48$

$x^2+2x-48=0$

$(x-6)(x+8)=0$

x는 자연수이므로 $x=6$이다.

5. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



① 2　　② -2　　③ $\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{5}$　　⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$

$\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$

두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.

이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면,

두 근의 차 $|\alpha - \beta|$는

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$에서

$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$이므로

두 근의 차는

$\pm\sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

6. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 만족시키는 실근을 p, q라 할 때 $(p-q)^2 \neq 0$ 이 성립한다. 실수 x에 대하여 이차방정식 $bx^2+2(a-2c)x-b=0$의 해의 개수와 이차방정식 $x^2+2(a+c)x+6(ac-a^2)+b^2=0$의 해의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(p-q)^2 \neq 0$ 에서 $p-q \neq 0$, $p \neq q$ 이므로 $ax^2+bx+c=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=b^2-4ac>0 \cdots ㉠$

$bx^2+2(a-2c)x-b=0$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a-2c)^2+b^2\\&=a^2-4ac+4c^2+b^2\\&=a^2+4c^2+b^2-4ac\end{aligned}$$

그런데 ㉠에서 $b^2-4ac>0$ 이고 $a^2+4c^2 \geq 0$ 이므로 $a^2+4c^2+b^2-4ac>0$

따라서 $bx^2+2(a-2c)x-b=0$ 은 $D>0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

$x^2+2(b+c)x+6(bc-a^2)=0$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(a+c)^2-6(ac-a^2)+b^2\\&=a^2+2ac+c^2-6qc+6a^2+b^2\\&=b^2-4ac+c^2+7a^2\end{aligned}$$

그런데 ㉠에서 $b^2-4ac>0$ 이고 $c^2+7a^2 \geq 0$ 이므로

$b^2-4ac+c^2+7a^2>0$

따라서 $x^2+2(a+c)x+6(ac-a^2)+b^2=0$ 은 $D>0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

따라서 두 이차방정식의 근의 개수의 합은 4