

1. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

- ① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$
④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2+5x-6} &= -\sqrt{(x-3)(2-x)} \\ &= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x} \text{ 이려면}\end{aligned}$$

$(x-3)(2-x)$ 에서

$$\textcircled{1} \ x-3 \leq 0, \ x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \ 2-x \leq 0, \ x \geq 2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

2. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

3. 연립부등식 $0.2x - 3 < \frac{1}{2}x \leq 3 + 0.3x$ 를 풀면?

① $-9 < x \leq 3$

② $-15 < x \leq -10$

③ $-3 < x \leq 4$

④ $-10 \leq x < 15$

⑤ $-10 < x \leq 15$

해설

$$0.2x - 3 < \frac{1}{2}x \text{에서}$$

$$2x - 30 < 5x, 3x > -30, x > -10$$

$$\frac{1}{2}x \leq 3 + 0.3x \text{에서}$$

$$5x \leq 30 + 3x, x \leq 15$$

$$\therefore -10 < x \leq 15$$

4. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

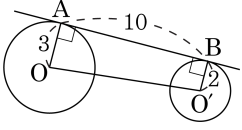
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

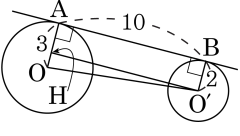
5. 다음 그림의 두 원 O, O' 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



- ① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O' 에서 선분 AO 에 내린
수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 $OO'H$ 에서
 $OO' = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



6. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우

$x = 1$ 을 대입한다.

$$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$$

7. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

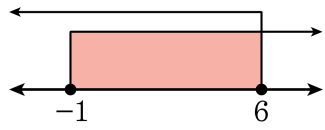
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned}x^2+x=A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\&= (A-2)(A-12)+24 \\&= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\&= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8)=10\end{aligned}$$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases}$ 의 해가 다음과 같을 때, a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{cases} 3x+7 \leq -x+31 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x \leq 24 \\ x+a \geq -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -3-a \end{cases}$$

$\therefore -3-a \leq x \leq 6$
 해가 $-1 \leq x \leq 6$ 이므로 $-3-a = -1$
 $\therefore a = -2$

9. 두 점 A(1, 3), B(-3, 7)을 지나는 직선에 수직이고, 선분AB를 3 : 1로 내분하는 점 C를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x + y + 8 = 0$ ② $x + y - 8 = 0$ ③ $x - y + 8 = 0$
④ $x - y - 8 = 0$ ⑤ $x - y + 4 = 0$

해설

$$\overline{AB} \text{의 기울기} = \frac{7-3}{-3-1} = -1$$

$$(\overline{AB} \text{에 수직인 직선의 기울기}) = 1$$

또 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 C의 좌표를 (a, b) 라고 하면,

$$a = \frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3 + 1} = -2$$

$$b = \frac{3 \times 7 + 1 \times 3}{3 + 1} = 6$$

$$\therefore C(-2, 6)$$

따라서 구하는 직선은 기울기 1이고,

점 $(-2, 6)$ 을 지나는 직선이므로,

$$y - 6 = x + 2 \quad \therefore x - y + 8 = 0$$

10. 다음 두 식을 동시에 만족하는 x 가 1개일 때, r 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M + m$ 의 값을 구하면?

$$\begin{aligned}x^2 + (y - 4)^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(0, 4)$ 이므로
두 원의 중심거리 d 는

$$d = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = 4$$

두 식을 동시에 만족하는 x 가 1개이므로
두 원은 다음 그림과 같이 한 점에서 만
난다.

(i) 외접할 경우

$$4 = r + 3 \text{ 에서 } r = 1$$

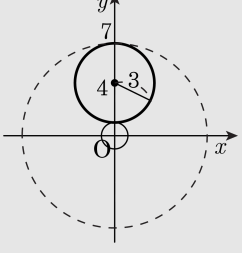
$$\therefore m = 1$$

(ii) 내접할 경우

$$4 = r - 3 \text{ 에서 } r = 7$$

$$\therefore M = 7$$

$$\therefore M + m = 1 + 7 = 8$$



11. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 를 원 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

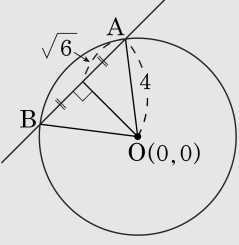
원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(2,3)$
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(-1,5)$
점 $(-1, 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x+3)+3(y-2)+2=0$
 $\therefore x+3y-1=0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
 $a=3, b=-1 \therefore a+b=2$

12. 직선 $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 만나서 생기는 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 양수 k 의 값은?

- ① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로,



$$\overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{6}$$

이 때, $\triangle AHO$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + k$

즉, $x - y + k = 0$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}, |k| = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{5} \quad (\because k > 0)$$

13. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 인 원을 x 축 방향으로 a 만큼 y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

- ① $a^2 + b^2 = 1$ ② $a^2 + b^2 = 4$ ③ $a^2 + b^2 = 9$
④ $a^2 + b^2 = 16$ ⑤ $a^2 + b^2 = 25$

해설

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \cdots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$\{(x-a)-1\}^2 + \{(y-b)+2\}^2 = 4$$

$$\{x-(a+1)\}^2 + \{y-(b-2)\}^2 = 4 \cdots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 과 원 $\textcircled{B}$ 이 외접하므로 중심거리 d 와 두 원 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 반지

름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$$\therefore d = \sqrt{(a+1-1)^2 + (b-2+2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16$$

14. 함수 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots \textcircled{\text{A}}$ 이 최솟값을 가질 때이다.

만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함수값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.

따라서 $a > 0 \cdots \textcircled{\text{B}}$

$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots \textcircled{\text{C}}$ 의 두 식이 모두 만족되면, $\textcircled{\text{A}}$ 이 양의 최솟값을 갖는다.

$$-4a^2 + 8a + 9 < 0 \text{ 에서 } a < \frac{2 - \sqrt{13}}{2}, a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2}$$

따라서 $\textcircled{\text{B}}$ 과의 공통 범위를 구하면 $a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로 $a = 3$ 이다.

15. 중심이 직선 $y = x (x > 0)$ 위에 있고, 점 $(2, 0)$ 을 지나는 원이 있다. 원점에서 이 원 위의 임의의 점까지의 거리의 최대값이 $2\sqrt{2}$ 일 때, 이 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

④ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

⑤ $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 20$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로

중심을 (a, a) 라고 하자.

원은 반지름이 r 이라고 하면,

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

$(2, 0)$ 을 지나므로,

$$(a-2)^2 + a^2 = r^2$$

거리의 최대값은 원점에서 중심까지의 거리에

반지름만큼 더한 값이므로,

$$2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + a^2} + r = a\sqrt{2} + r$$

$$\therefore r = \sqrt{2} \cdot (2-a)$$

위의 $(a-2)^2 + a^2 = r^2$ 에 대입하면

$$\therefore a = 1 \quad \therefore r = \sqrt{2}$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$