

1. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $X \cup (A \cap B) = X$ 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $X \subset A$

② $X \subset (A \cap B)$

③ $X \subset (A \cup B)$

④ $(A \cup B) \subset X$

⑤ $(A \cap B) \subset X$

해설

$X \cup (A \cap B) = X$ 는 $(A \cap B) \subset X$ 를 의미한다.

① $X \subset A$ 는 알 수 없다.

② $X \subset (A \cap B)$ 는 알 수 없다.

③ $X \subset (A \cup B)$ 는 알 수 없다.

④ $(A \cup B) \subset X$ 는 알 수 없다.

2. 두 집합 $A = \{1, a, a + 2\}$, $B = \{a - 1, 5, 2 \times a\}$ 에 대하여 $A - B = \{3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 3$

해설

$A - B = \{3\}$ 이므로 $3 \in A$ 이다.

(1) $a = 3$ 일 때, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ 이고 $A - B = \{3\}$ 이다.

(2) $a + 2 = 3$ 일 때, $A = \{1, 3\}$, $B = \{0, 2, 5\}$ 이므로 $A - B = \{1, 3\}$ 이다.

따라서 (1), (2) 에서 $a = 3$ 이다.

3. 다음 중 조건 ' $x < 0$ 이고 $x^2 = 1$ ' 의 부정은?

- ① $x > 0$ 이고 $x^2 \neq 1$
- ② $x > 0$ 또는 $x^2 \neq 1$
- ③ $x \geq 0$ 이고 $x^2 \neq 1$
- ④ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)
- ⑤ $x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 또는 $x \neq -1$)

해설

' $x < 0$ 이고 $x^2 = 1$ ' 의 부정
 $\Rightarrow x \geq 0$ 또는 $x^2 \neq 1$
 $\Rightarrow x \geq 0$ 또는 ($x \neq 1$ 이고 $x \neq -1$)

4. 네 조건 $p : x > 0, q : y > 0, r : x < 0, s : y < 0$ 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R, S 라 할 때, 조건 $xy > 0$ 을 만족하는 집합은?

① $(P \cap Q) \cup (R^c \cap S^c)$

② $(P \cap Q) \cap (R \cap S)$

③ $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

④ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

⑤ $(P \cup Q) \cap (R \cup S)^c$

해설

$p : x > 0, q : y > 0, r : x < 0, s : y < 0$ 일 때
 $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0)$ 또는 $(x < 0, y < 0)$
따라서, 주어진 조건을 만족하는 집합은
 $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

5. 다음 <보기>의 명제 중 참인 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c, d 는 실수)

보기

- ㉠ $ab = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
- ㉡ $a + b > 2$, $ab > 1$ 이면 $a > 1$, $b > 1$ 이다.
- ㉢ $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
- ㉤ $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면 $a = b = 0$ 이다.
- ㉥ $a + b > 0$ 이면 $a > 0$ 또는 $b > 0$ 이다.

- ① ㉠, ㉢

② ㉢, ㉥

③ ㉡, ㉤
- ④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ 반례 : $a = 0, b = 1$
- ㉡ 반례 : $a = 3, b = \frac{1}{2}$
- ㉢ 반례 : $a = -\sqrt{2}, b = 1$

6. 전체집합을 U , 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 두 집합 P, Q 는 $P \cap Q^c = \emptyset, Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

- $\neg$

p 이면 $\sim q$ 이다.
- $\supset$

p 이면 q 이다.
- $\oplus$

$\sim q$ 이면 p 이다.

- ① $\neg$
- ② $\supset$
- ③ $\oplus$
- ④ $\neg, \oplus$
- ⑤ $\supset, \oplus$

해설

$P \cap Q^c = \emptyset$ 에서 $Q^c \subset P$ 이므로
 $P \cap Q^c = Q^c = \emptyset$
 $\therefore Q = U$
① $Q^c = \emptyset$ 이므로 $P \not\subset Q^c$ 이고
 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.
② $Q = U$ 이므로 $P \subset Q$ 이고
 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
③ $Q^c = \emptyset$ 이고 $Q^c \subset P$ 이고
 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

7. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 8 가지

▷ 정답 : 8 가 지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

8. 두 집합 $A = \{4, 6, x\}$, $B = \{1, 3, x+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 를 만족할 때, x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, x, x+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
 $x = 2$, $x + 3 = 5$ 이다. 따라서 $x = 2$

9. 다음 중 옳은 것은?

- ① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
- ② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$
- ③ $A \cup \emptyset = \emptyset$
- ④ $A \subset B, B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$
- ⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

- ① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
- ② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
- ③ $A \cup \emptyset = A$
- ⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

10. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = \emptyset$
- ㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$
- ㉢ m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $m = kn$ (k 는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

- ① ㉠, ㉡, ㉤
- ② ㉠, ㉢
- ③ ㉠, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉤
- ⑤ ㉢, ㉤

해설

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$
- ㉡ $A_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$
 $A_6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로
 $A_4 \cup A_6 = \{4, 6, 8, 12, 16, \dots\} \neq A_4$
- ㉢ $A_m = \{m, 2m, \dots, nm, (n+1)m, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, \dots, mn, (m+1)n, \dots\}$
 m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $A_m = A_{kn} = \{kn, 2kn, 3kn, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ 이므로
 $A_m \subset A_n$

11. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$
 ④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

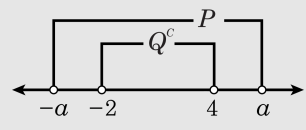
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

12. 다음은 명제 ‘ $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)’에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...
 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3 의 배수이다.
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로 n^2 을 3 으로 나눈 나머지는 0 또는 1 이다.
따라서 $n^2 + 1$ 을 3 으로 나눈 나머지는 1 또는 2 이다.
... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3 의 배수이다. ... ㉠
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로, n^2 을 3 으로 나눈 나머지는 0 또는 1 이다.
따라서, $n^2 + 1$ 을 3 으로 나눈 나머지는 1 또는 2 이다. ... ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

13. 전체집합 $U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x | 5 \leq x \leq 15\}$ 일 때, $A^c \cap B^c = \emptyset, n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 5개

해설

$$U = \{2x | x \leq 10, x \text{ 是 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

,

$$A^c \cap B^c = \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = U \circ \lfloor \underline{1}, n$$

집합 B 는 A 의 외소 중 A 개는 반드시 포함되고 나머지 k 개는

(1) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 12\}$ 를 반드시 포함하고 14는 반드시

(2) A의 원소 중 {6, 8, 10, 14}를 반드시 포함하고 14는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

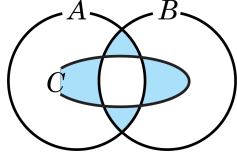
(3) A 의 원소 중 $\{6, 8, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(4) A 의 원소 중 $\{6, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(5) A 의 원소 중 $\{8, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $1 \times 5 = 5$ (개)

14. 다음 그림에서 $n(A) = 18, n(B) = 12, n(C) = 15, n(A \cup B) = 25, n(B \cup C) = 18, n(C \cup A) = 23$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 5$,
 $n(B \cup C) = 18$ 이므로, $n(C - B) = n(B \cup C) - n(B) = 18 - 12 = 6$
,
 $n(C \cup A) = 23$ 이므로, $n(C - A) = n(C \cup A) - n(A) = 23 - 18 = 5$
,
 $n(C) = 15$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = n(C) - n(C - B) - n(C - A) = 15 - 6 - 5 = 4$,
색칠한 부분은 $((A \cap B) - (A \cap B \cap C)) \cup (C - A) \cup (C - B)$,
 $n((A \cap B) - (A \cap B \cap C) \cup (C - A) \cup (C - B)) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) + n(C - A) + n(C - B) = 5 - 4 + 5 + 6 = 12$

15. 집합 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

- ① 50개 ② 66개 ③ 67개 ④ 76개 ⑤ 78개

해설

문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\leq 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인 $81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in A \rightarrow 3b \notin A \rightarrow 9b \in A \rightarrow 27b \notin A \rightarrow 81b \in A$ 와 같이 된다. 결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개). 따라서 구하는 최댓값은 $67 + 8 + 1 = 76$