1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -3은 -27의 세제곱근이다.

② 81의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm - 2$

2. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= \left(3^{2\sqrt{2}-3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

3. 세 수 $A = 2^{\frac{1}{2}}, B = 3^{\frac{1}{3}}, C = 9^{\frac{1}{9}}$ 의 대소 관계는?

① $A < B < C$ ② $B < A < C$ ③ $B < C < A$

④ $C < B < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = 2^{\frac{1}{2}}$ 이면 $A^{18} = (2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512$

$B = 3^{\frac{1}{3}}$ 이면 $B^{18} = (3^{\frac{1}{3}})^{18} = 3^6 = 729$

$C = 9^{\frac{1}{9}}$ 이면 $C^{18} = (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 9^2 = 81$

$C^{18} < A^{18} < B^{18}$ 이므로

$\therefore\ C < A < B$

4. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 일 때, $a-\frac{1}{a}$ 의 값은?(단, $a>1$)

① $\frac{15}{4}$ ② 5 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 15 ⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ 에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-4=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\because a>1)$$

$$\therefore a-\frac{1}{a}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

5. $11^x = 25,\ 275^y = 125$ 일 때, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}}$ 에서 $5^{\frac{2}{x}} = 11$

$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}}$ 에서 $5^{\frac{3}{y}} = 275$ 이므로

$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \dfrac{1}{25}$

$5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}} = 5^{-2},\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -2$

6. $a = \dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$$a = \frac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$$

$$= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2}$$

$$= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4} = \log_4(\log_5 7)$$

$$\therefore 4^a = \log_5 7$$

7. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log_{10} 2\cdot(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$=\log_{10}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$
$=\log_{10} 100=2$

8. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

9. $\log_5 250 = n + \alpha$(n은 정수, $0 \le a < 1$)라고 할 때, $n \times 25^{\alpha}$의 값은?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$125 < 250 < 625$이므로

$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$

$\log_5 250$의 정수부분은 $n = 3$ 이고

소수부분은 $\alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \dfrac{250}{125} = \log_5 2$

따라서 $25^{\alpha} = 25^{\log_5 2} = 4$이므로 25^{α}의 값과 정수부분 n의 곱은

$3 \times 4 = 12$ 이다.

10. $100^{0.3}$ 의 정수 부분은?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log 100^{0.3} = 0.3 \log 100 = 0.3 \times 2 = 0.6$
이때 $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로
$\log 3 < \log 100^{0.3} < \log 4$
$\therefore\ 3 < 100^{0.3} < 4$
따라서 $100^{0.3}$ 의 정수 부분은 3이다.

11. $\log x$의 정수 부분이 4이고, $\log y$의 정수 부분이 2일 때, $\log\sqrt{xy}$의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log x = 4 + \alpha \ (0 \leq \alpha < 1)$

$\log y = 2 + \beta \ (0 \leq \beta < 1)$

$\log\sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}(\log^{x} + \log^{y})$

$= \dfrac{1}{2}(4 + \alpha + 2 + \beta)$

$= 3 + \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta < 1$이므로

$0 \leq \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) < 1$

$\therefore \log^{\sqrt{xy}}$의 정수 부분은 3

12. 두 양수 A, $\dfrac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \dfrac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1)+(1-\alpha)$

따라서 $\log \dfrac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha+\beta = \alpha+(1-\alpha) = 1$

13. 7^{100} 은 85자리의 수이다. 이 때, 7^{10} 의 자릿수는?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

7^{100} 은 85자리의 수이므로 $\log 7^{100}$ 의 지표는 84이다.

$84 \le \log 7^{100} \le 85, 84 \le 100 \log 7 \le 85$

$0.84 \le \log 7 \le 0.85$

$0.84 \times 10 \le 10 \log 7 \le 0.85 \times 10$

$8.4 \le \log 7^{10} \le 8.5$

따라서 $\log 7^{10}$ 의 지표가 8이므로 7^{10} 은 9자리의 수이다.

14. 다음 <보기> 중 $\log A$와 소수 부분이 항상 같은 것으로 묶어 놓은 것은? (단, 로그는 상용로그)

보기

ㄱ $10\log A$ ㄴ $10-\log A$ ㄷ $\log 10A$

ㄹ $(\log A)-10$ ㅁ $\log\dfrac{A}{10}$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄴ, ㄷ, ㄹ ③ ㄷ, ㄹ, ㅁ

④ ㄱ, ㄴ, ㅁ ⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

해설

소수 부분이 같으려면
진수의 숫자의 배열이 같아야하므로
ㄷ, ㄹ, ㅁ

15. 수소 이온 농도는 용액 1L 속에 존재하는 수소 이온의 그램이온수의 역수의 상용로그를 취하여 구하고, 기호 pH로 나타낸다.

즉, $\mathrm{pH} = \log \frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$ ($[\mathrm{H}^+]$는 수소 이온의 그램이온수)이다. 두 용액 A, B의 수소 이온 농도가 각각 4, 6이고 수소 이온의 그램이온수가 각각 a, b일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ 1 ④ 10 ⑤ 100

해설

$4 = \log \frac{1}{a}$에서 $\frac{1}{a} = 10^4$ $\therefore\ a = 10^{-4}$

$6 = \log \frac{1}{b}$에서 $\frac{1}{b} = 10^6$ $\therefore\ b = 10^{-6}$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2 = 100$

16. $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

따라서, $a=2,\ b=1 \quad \therefore\ a+b=3$

17. 서로 다른 세 실수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a,\ b,\ c$는 1이 아닌 양수이다.)

보기

ㄱ $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

ㄴ $\log a,\ \log b,\ \log c$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

ㄷ $\log_a 2,\ \log_b 2,\ \log_c 2$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$

ㄱ (참) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2$

따라서, $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

ㄴ (참) $\log a + \log c = \log ac = \log b^2 = 2\log b$

따라서, $\log a,\ \log b,\ \log c$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

ㄷ (거짓) [반례] $a = 2,\ b = 4,\ c = 8$이면

$\log_2 2 = 1,\ \log_4 2 = \frac{1}{2},\ \log_8 2 = \frac{1}{3}$이므로

$b^2 = ac$이지만 $2\log_b 2 \neq \log_a 2 + \log_c 2$이다.

18. 어떤 세균의 수는 2시간마다 3배가 된다고 한다. 관측을 한지 2일 후에 세균의 수는 x배가 된다. 여기에서 x는 몇 자리 정수인가? (단, $\log 2 = 0.3010,\ \log 3 = 0.4771$)

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리 ④ 13자리 ⑤ 14자리

해설

처음 세균 수를 a라 하면

2시간 후 세균 수$= 3a$

4시간 후 세균 수$= 3^2a$

6시간 후 세균 수$= 3^3a$

$\vdots$

48시간 후 세균 수$= 3^{24}a$

$\therefore x = 3^{24}$

$$\begin{aligned}\log 3^{24} &= 24\log 3\\ &= 24 \times 0.4771\\ &= 11.4504\end{aligned}$$

지표가 11이므로 12자리 정수

19. 다음을 만족하는 두 자연수 m, n의 곱 mn의 값을 구하면?

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right) + \log\left(1+\frac{1}{m+1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{m+n}\right) = \log n$$

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \log\frac{m+1}{m}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right) = \log\frac{m+2}{m+1}$$

$$\vdots$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right) = \log\frac{m+n+1}{m+n}$$

따라서, 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \log\left(\frac{m+1}{m}\times\frac{m+2}{m+1}\times\cdots\times\frac{m+n+1}{m+n}\right)\\ &= \log\frac{m+n+1}{m}\end{aligned}$$

즉, $\log\dfrac{m+n+1}{m} = \log n$에서

$$\frac{m+n+1}{m} = n$$

$mn-m-n=1, (m-1)(n-1)=2$

m, n이 자연수이므로 $m-1=2$, $n-1=1$ 또는 $m-1=1$, $n-1=2$

$\therefore\ m=3,\ n=2$ 또는 $m=2,\ n=3$

$\therefore\ mn=6$

20. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
$\log 2^{25} = 25\log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250 이다.
$\log 2 = 0.3010,\ \ \log 3 = 0.4771,\ \ \log 4 = 2\log 2 = 0.6020$ 이므로
$\log 3 < 0.5250 < \log 4$
$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3 이다.