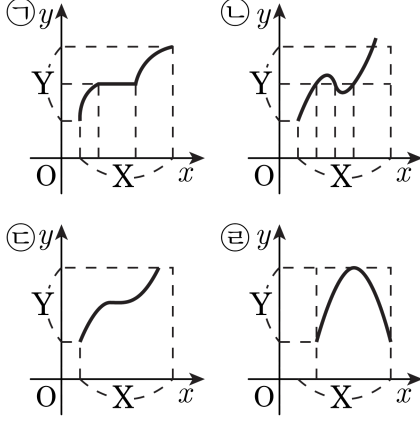


1. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① (㉠) (㉢)
 ② (㉡) (㉣)
 ③ (㉢) (㉣)
- ④ (㉠)
 ⑤ (㉠) (㉡) (㉣)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.

㉠

㉡

㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢, ㉣의 경우와 같다.

2. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

3. 함수 $y = |x - 3| - 1$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

① 2, 1

② 2, 0

③ 2, -1

④ 1, -1

⑤ 1, -2

해설

$0 \leq x \leq 4$ 에서

$$y = |x - 3| - 1$$

$$= \begin{cases} x - 4 & (3 \leq x \leq 4) \\ -x + 2 & (0 \leq x < 3) \end{cases}$$

따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림

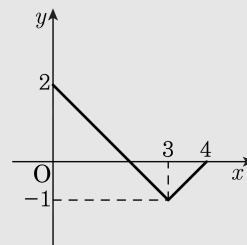
과 같으므로

$x = 0$ 일 때

최댓값은 2 이고

$x = 3$ 일 때

최솟값은 -1 이다.



4. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

5. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에 대하여 $X = \{x|0 \leq x \leq 1\}$ 이고 $f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $f(x) + f(1-x)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

- (i) x 가 유리수일 때 $f(x) + f(1-x) = x + 1-x = 1$
(ii) x 가 무리수일 때 $f(x) + f(1-x) = 1-x + 1-(1-x) = 1$
(i), (ii)에서 $f(x) + f(1-x) = 1$

6. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

7. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \leq y \leq 10\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ 이고

$f(-1) = -a + b$, $f(4) = 4a + b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a + b \leq y \leq 4a + b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a + b = -5$, $4a + b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a + b = 4$

8. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되려면

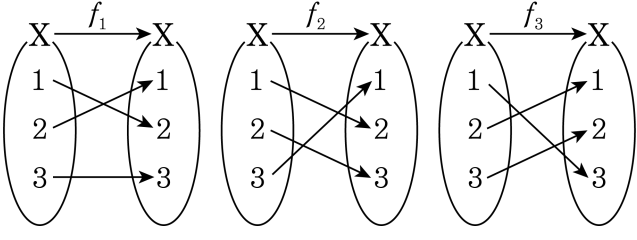
$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

9. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 X 로의 일대일대응 f_1, f_2, f_3 가 다음과 같다. 이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$ 와 같은 것은?



- ① f_1

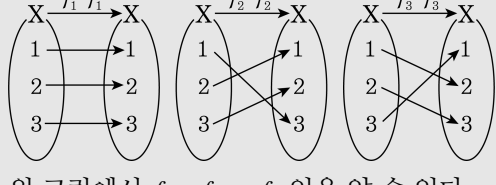
② f_2

③ f_3
- ④ $f_1 \circ f_1$

⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면



위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여

$$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$$

$$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$$

$$f(f(f(x))) = x \text{ 이므로 } 8x - 21 = x$$

$$\therefore x = 3$$

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ g = g \circ f \text{에서 } -2x + 2k + 3 &= -2x - 3 + k \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

12. $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3}$ 를 만족할 때, $f(-3) = \frac{a}{b}$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < b$, a 와 b 는 서로소인 정수)

① -2 ② 2 ③ 6 ④ 12 ⑤ 15

해설

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x-3}{x+3} \text{ 에서}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -3 \text{ 이라고 하면 } x-1 = -3(x+1)$$

$$4x = -2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-3) = \frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+3} = -\frac{7}{5}$$

$$a = -7, b = 5 \quad \therefore a+b = -2$$

13. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

14. 함수 $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $f^{10}(x) = ax + b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $2^{10} - 1$
- ② 2^{10}
- ③ $2^{11} - 1$
- ④ 2^{11}
- ⑤ $2^{12} - 1$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) \\ &= 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(2x - 1) \\ &= 4(2x - 1) - 3 = 8x - 7 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(2x - 1) \\ &= 8(2x - 1) - 7 = 16x - 15 \\ &\vdots \\ f^{n-1} &= 2^{n-1} \cdot x - (2^{n-1} - 1) \text{로 놓으면} \\ f^n(x) &= (f^{n-1} \circ f)(x) = f^{n-1}(f(x)) \\ &= f^{n-1}(2x - 1) = 2^{n-1}(2x - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n x - (2^n - 1) \\ n = 10 \text{을 대입하면 } f^{10}(x) &= 2^{10}x - (2^{10} - 1) \text{이므로} \\ \therefore a &= 2^{10}, b = -2^{10} + 1 \text{이다.} \\ \therefore a - b &= 2^{10} + 2^{10} - 1 = 2^{11} - 1 \end{aligned}$$

15. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$ 에서 $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로 $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

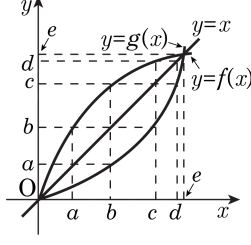
▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

17. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x), y = g(x), y = x$ 의 그래프이다. 이 때, $(f \circ g \circ f)(b)$ 의 값을 구하면? (단, 모든 점선은 x 축, 또는 y 축에 평행하다.)

- ① a
- ② b
- ③ c
- ④ d
- ⑤ e



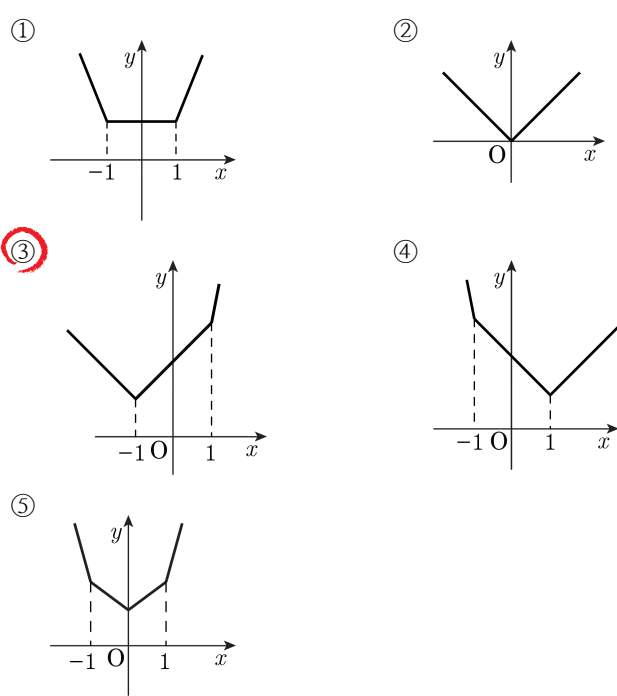
해설

$f(b)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는 $y = x$ 의 $f(b) = x$ 값이고
이때 $x = c, g(c)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는 $y = x$ 의 $g(c) = x$ 값이고
이때 $x = b, f(b) = c$ 이므로
 $\therefore c$

해설

그림에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로
 $(f \circ g \circ f)(b) = f(b) = c$

18. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?



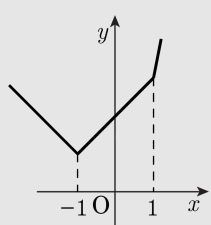
해설

i) $x \leq -1$ 일 때, $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x - (x + 1)$
 $= -x$

ii) $-1 < x \leq 1$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x + (x + 1)$
 $= x + 2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= (x - 1) + x + (x + 1)$
 $= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



19. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.
 $x = 1, y = -1$ 을 대입하면
 $f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = 0$
 $f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로
 $\therefore f(-1) = -3$

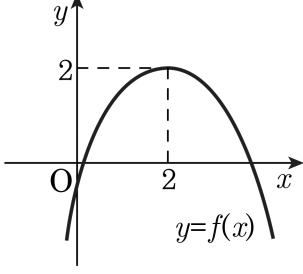
20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

- ① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

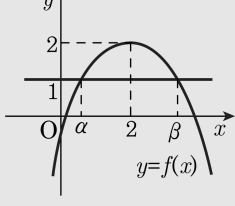
21. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면
 $0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만
 $f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

22. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 의 역함수를 각각 f^{-1} , g^{-1} 라고 할 때, $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(5)$ 의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f &= f \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f \\ &= f \circ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \\ &= f \circ g^{-1} \circ I \\ &= f \circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $(f \circ g^{-1})(5) = f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 5$

$-k + 2 = 5$ 에서 $k = -3$, 즉 $g^{-1}(5) = -3$

$\therefore f(g^{-1}(5)) = f(-3) = 2 \times (-3) - 1 = -7$

23. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k (x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $0 < k < \frac{25}{4}$
 ② $k < \frac{25}{4}$
 ③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
- ④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$
 ⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

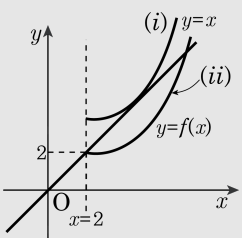
주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x - 2)^2 + k - 4 (x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접할 때,
 $x^2 - 4x + k = x, x^2 - 5x + k = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = 5^2 - 4k = 0$
 $\therefore k = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지날 때
 $2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$ 이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$



24. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = S, A \cap B = \{5\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 36개

해설

함수 $f: A \Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
 $A \cup B = S, A \cap B = \{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A = \{1, 2, 5\}, B = \{3, 4, 5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의
수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6
개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

25. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$

② $h(x) = 2g(x) - 1$

③ $h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$

④ $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots \textcircled{1}$$

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x \text{ 를 소거하면 } 2h(y) - 1 = g(h)$$

$$\text{그러므로 } h(y) = \frac{1}{2} \{g(h) + 1\}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$$

26. 방정식 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{3}{4}$
- ③ 1
- ④ $\frac{7}{5}$
- ⑤ 3

해설

$y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로
 $y = \frac{1}{2}(x-x)+1 = 1$

(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로
 $y = \frac{1}{2}(-x-x)+1 = -x+1$

따라서 $y = \frac{1}{2}(|x-x|)+1$ 과 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.
그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는
 $\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4}$