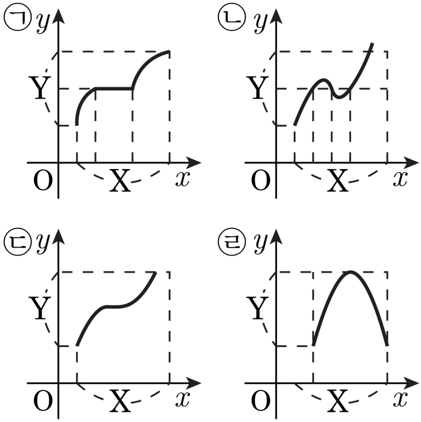
1. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

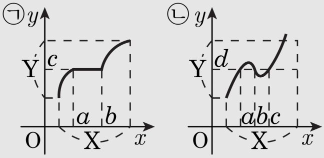


① (ㄱ) (ㄷ)　　② (ㄴ) (ㄹ)　　③ (ㄷ)

④ (ㄱ)　　⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X 에 서 Y 로 의 일 대 일 대 응 을 찾 으 면 된 다.



㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는 x의 상이 모두 c이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ $a,\ b,\ c$의 상이 모두 d이므로 일대일 대응이 아니다.

㉣, ㉡의 경우와 같다.

2. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$

따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

3. 함수 $y=|x-3|-1$ 에 대하여 $0 \le x \le 4$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 차례대로 구하면?

① 2, 1　② 2, 0　③ 2, -1

④ 1, -1　⑤ 1, -2

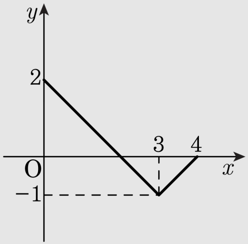
해설

$0 \le x \le 4$ 에서

$y=|x-3|-1$

$$=\begin{cases} x-4 & (3 \le x \le 4) \\ -x+2 & (0 \le x < 3) \end{cases}$$

따라서, 위 함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$x=0$ 일 때

최댓값은 2 이고

$x=3$ 일 때

최솟값은 -1 이다.

4. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x+2$

㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1)=|-1|^2=1 \in Y$
$f(1)=|1|^2=1 \in Y$
$f(2)=|2|^2=4 \in Y$

㉡ $g(-1)=-1+2=1 \in Y$
$g(1)=1+2=3 \in Y$
$g(2)=2+2=4 \in Y$

㉢ $h(-1)=|-1|+1=2 \in Y$
$h(1)=|1|+1=2 \in Y$
$h(2)=|2|+1=3 \in Y$

㉣ $i(-1)=i(1)=0 \notin Y$

㉤ $j(2)=5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

5. 함수 $f : X \to Y$에 대하여 $X = \{x | 0 \le x \le 1\}$이고 $f(x) = \begin{cases} x & (x\text{는 유리수}) \\ 1 - x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 일 때, $f(x) + f(1-x)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

(i) x가 유리수일 때 $f(x) + f(1-x) = x + 1 - x = 1$
(ii) x가 무리수일 때 $f(x) + f(1-x) = 1 - x + 1 - (1 - x) = 1$
(i), (ii)에서 $f(x) + f(1-x) = 1$

6. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x-4)(x+2) = 0$

$\therefore \ x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2, \ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

7. 두 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$, $Y = \{y \mid -5 \le y \le 10\}$ 에 대하여 $f : X \to Y$, $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 로 정의되는 함수가 일대일 대응일 때, $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

일차함수 $f(x) = ax+b$ $(a > 0)$ 의 정의역이 $X = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$ 이고

$f(-1) = -a+b$, $f(4) = 4a+b$ 이므로

치역은 $\{y \mid -a+b \le y \le 4a+b\}$ 이다.

그런데 함수가 일대일 대응이 되기 위해서는

공역과 치역이 같아야 하므로

$-a+b = -5$, $4a+b = 10$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = -2$

$\therefore 2a+b = 4$

8. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

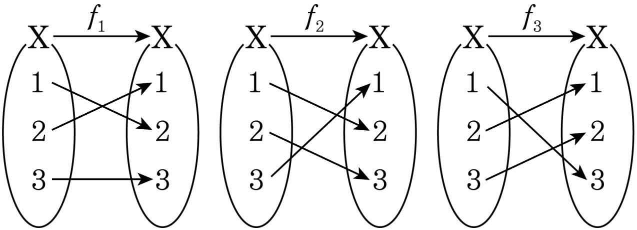
$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f : X \to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x) \geq x$

$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$

$\Rightarrow x \leq 0,\ x \geq 5$

$x \geq k$ 이므로 $k = 5$

9. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에서 X로의 일대일대응 $f_1,\ f_2,\ f_3$ 가 다음과 같다. 이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$ 와 같은 것은?

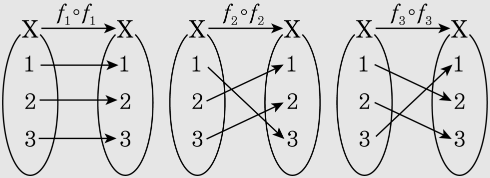


① f_1 ② f_2 ③ f_3

④ $f_1 \circ f_1$ ⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면



위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여

$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$

$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$

$\therefore x = 3$

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $-2x + 2k + 3 = -2x - 3 + k$

$\therefore\ k = -6$

12. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-3}{x+3}$ 를 만족할 때, $f(-3)=\dfrac{a}{b}$ 이다. 이 때, $a+b$의 값은? (단, $a<b$, a와 b는 서로소인 정수)

① -2　　② 2　　③ 6　　④ 12　　⑤ 15

해설

$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{x-3}{x+3}$ 에서

$\dfrac{x-1}{x+1}=-3$ 이라고 하면 $x-1=-3(x+1)$

$4x=-2 \quad \therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$

$$f(-3)=\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+3}=-\frac{7}{5}$$

$a=-7,\ b=5 \quad \therefore\ a+b=-2$

13. 두 함수 $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$

④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면

$h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$

$\therefore\ 2a = 4,\ a + b = -3$

이것을 풀면 $a = 2,\ b = -5$

따라서 $h(x) = 2x - 5$

14. 함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 $f^{10}(x)=ax+b$라 할 때, $a-b$의 값은? (단, $f^2=f\circ f$, $f^n=f^{n-1}\circ f$ 이다.)

① $2^{10}-1$ ② 2^{10} ③ $2^{11}-1$

④ 2^{11} ⑤ $2^{12}-1$

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-1) \\ &= 2(2x-1)-1 = 4x-3 \\ f^3(x) &= (f^2\circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(2x-1) \\ &= 4(2x-1)-3 = 8x-7 \\ f^4(x) &= (f^3\circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(2x-1) \\ &= 8(2x-1)-7 = 16x-15 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$f^{n-1}=2^{n-1}\cdot x-(2^{n-1}-1)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f^n(x) &= (f^{n-1}\circ f)(x) = f^{n-1}(f(x)) \\ &= f^{n-1}(2x-1) = 2^{n-1}(2x-1)-(2^{n-1}-1) \\ &= 2^n x-(2^n-1) \end{aligned}$$

$n=10$ 을 대입하면 $f^{10}(x)=2^{10}x-(2^{10}-1)$ 이므로

$\therefore a=2^{10}$, $b=-2^{10}+1$ 이다.

$\therefore a-b=2^{10}+2^{10}-1=2^{11}-1$

15. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+2)=6x-3$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$f(3x+2)=6x-3$에서 $3x+2=t$라 하면

$f(t)=2t-7$이므로 $f(x)=2x-7$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

$\therefore g(3)=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 (x \geq 0) \\ x+1 (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5)+g(0)$ 의 값을 구하여라.

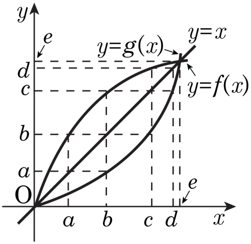
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2+1 \geq 1$ 이므로
$f(a) = a^2+1 = 5$
$\therefore a = 2 (\because a \geq 0)$ $\therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x+1 < 1$ 이므로
$f(b) = b+1 = 0$
$\therefore b = -1$ $\therefore g(0) = -1$
$\therefore g(5)+g(0) = 2-1 = 1$

17. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x), y=g(x), y=x$ 의 그래프이다. 이 때, $(f\circ g\circ f)(b)$ 의 값을 구하면? (단, 모든 점선은 x 축, 또는 y 축에 평행하다.)



① a　② b　③ c
④ d　⑤ e

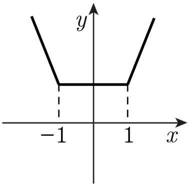
해설

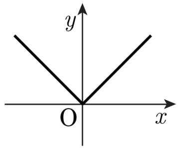
$f(b)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는
$y=x$ 의 $f(b)=x$ 값이고
이때 $x=c,\ g(c)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는
$y=x$ 의 $g(c)=x$ 값이고
이때 $x=b,\ f(b)=c$ 이므로
$\therefore\ c$

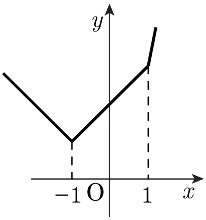
해설

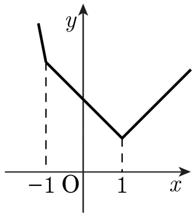
그림에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로
$(f\circ g\circ f)(b)=f(b)=c$

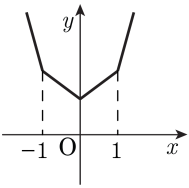
18. 다음 중 함수 $y=|x-1|+x+|x+1|$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

i) $x \le -1$ 일 때, $y=|x-1|+x+|x+1|$

$= -(x-1)+x-(x+1)$

$= -x$

ii) $-1 < x \le 1$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$

$= -(x-1)+x+(x+1)$

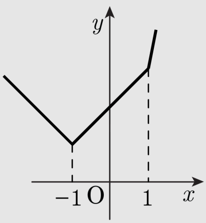
$= x+2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$

$= (x-1)+x+(x+1)$

$= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



19. 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1)=3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=0$이다.
$x=1, y=-1$을 대입하면
$f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)=0$
$f(-1)=-f(1),\ f(1)=3$이므로
$\therefore\ f(-1)=-3$

20. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \to X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \le x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \le 1$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \le 2$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \le 3$

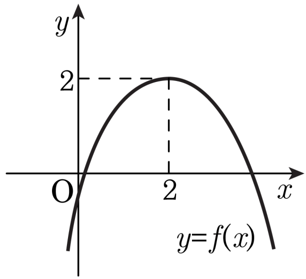
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \le 4$

따라서, 구하는 함수 f 의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

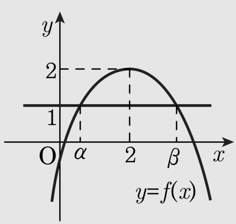
21. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

22. 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=-x+2$ 의 역함수를 각각 f^{-1}, g^{-1} 라고 할 때, $\left(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f\right)(5)$ 의 값은?

① -1　② -3　③ -5　④ -7　⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f &= f\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ f \\ &= f\circ g^{-1}\circ\left(f^{-1}\circ f\right) \\ &= f\circ g^{-1}\circ I \\ &= f\circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $\left(f\circ g^{-1}\right)(5)=f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5)=k$ 로 놓으면 $g(k)=5$

$-k+2=5$ 에서 $k=-3$, 즉 $g^{-1}(5)=-3$

$\therefore f(g^{-1}(5))=f(-3)=2\times(-3)-1=-7$

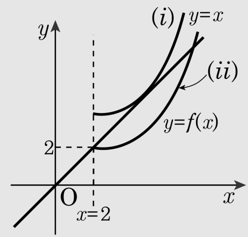
23. 함수 $f(x)=x^2-4x+k(x\geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0<k<\frac{25}{4}$　② $k<\frac{25}{4}$　③ $6\leq k\leq\frac{25}{4}$

④ $6<k\leq\frac{25}{4}$　⑤ $6\leq k<\frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=x$ 위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4(x\geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$가 접할 때,

$x^2-4x+k=x,\ x^2-5x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4k=0$

$\therefore \mathrm{k}=\frac{25}{4}$

(ii) $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2^2-4\cdot 2+k=2$ 이므로 $k=6$

(i), (ii) 에서 $6\leq k<\frac{25}{4}$

24. 집합 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A\cup B=S$, $A\cap B=\{5\}$ 일 때, 함수 $f:A\rightarrow B$ 가 역함수를 가지는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

함수 $f:A\Rightarrow B$ 가 역함수를 가지므로
함수 f 는 일대일 대응이다.
$A\cup B=S$, $A\cap B=\{5\}$ 을 만족하고
함수 f 가 일대일 대응이므로
두 집합 A, B 는 각각 5 를 원소로 가지면서
$1,2,3,4$ 중에서 서로 다른 두 개씩을 나누어 가진다.
예를 들어 $A=\{1,2,5\}$, $B=\{3,4,5\}$ 일 때와 같이 나누는 방법의 수는 6 가지이다.
한편 6 가지 각각의 경우에 일대일 대응인 함수의 개수는 모두 6 개씩 만들 수 있으므로
구하는 함수의 개수는 $6\times6=36$

25. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x)+1$

② $h(x) = 2g(x)-1$

③ $h(x) = \frac{1}{2}\{g(x)+1\}$

④ $h(x) = g(\frac{x}{2}+1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1)+1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots$ ㉠

$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 x 를 소거하면 $2h(y)-1 = g(h)$

그러므로 $h(y) = \frac{1}{2}\{g(h)+1\}$

$\therefore\ h(x) = \frac{1}{2}\{g(x)+1\}$

26. 방정식 $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{3}{4}$　　③ 1　　④ $\frac{7}{5}$　　⑤ 3

해설

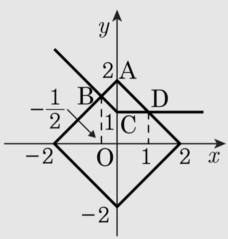
$y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x|=x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(x-x)+1=1$$

(ii) $x<0$ 일 때, $|x|=-x$ 이므로

$$y=\frac{1}{2}(-x-x)+1=-x+1$$



따라서 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 과 $|x|+|y|=2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}$$