

1. 다음 ( )안에 알맞은 말을 써라.

함수  $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ( )이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응



2. 다음 중 항등함수를 찾으면?

- ①  $f(x) = x$                       ②  $f(x) = x + 1$                       ③  $f(x) = x - 1$   
④  $f(x) = x^2$                       ⑤  $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는  $f(x) = x$  또는  $y = x$  이다.

3. 집합  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{a, b\}$  라 할 때, 집합  $X$  에서  $Y$  로의 함수의 개수를 구하면?
- ① 1 가지                      ② 2 가지                      ③ 3 가지
- ④ 4 가지                      ⑤ 5 가지

해설

X

1

2

Y

a

b

X

1

2

Y

a

b

X

1

2

Y

a

b

X

1

2

Y

a

b

∴ 4가지

4.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \rightarrow f(x)$ 라 한다.  $X$ 의 임의의 두 원소를  $a, b$ 라 할 때, 다음 중에서  $f$ 가 일대일 함수일 조건은?

- ①  $a = b$  이면  $f(a) = f(b)$       ②  $f(a) = f(b)$  이면  $a = b$   
③  $f(a) \neq f(b)$  이면  $a \neq b$       ④  $a \neq b$  이면  $f(a) = f(b)$   
⑤  $a = b$  이면  $f(a) \neq f(b)$

해설

일대일함수의 정의

「 $a \neq b$  이면,  $f(a) \neq f(b)$ 」의 대우

5. 실수  $x, y$ 에 대하여  $f(xy) = f(x)f(y)$  이고  $f$ 가 일대일대응일 때,  $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌  $x$ 에 대하여  $y = 0$ 을  
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.  
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$   
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$  또는  $f(x) = 1$   
만일  $f(x) = 1$ 이면  
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$  이다.  
위는  $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로  
 $f(x) = 1$ 은 부적당  
 $\therefore f(0) = 0$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f, g$  에 대하여  $f(x)$  는 항등함수이고,  $g(x) = -2$  인 상수함수일 때,  $f(4) + g(-1)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$  는 항등함수이므로  $f(x) = x$  에서  $f(4) = 4$   
 $g(x) = -2$  에서  $g(-1) = -2$   
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

7. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

①  $y = 3$

②  $x = -1$

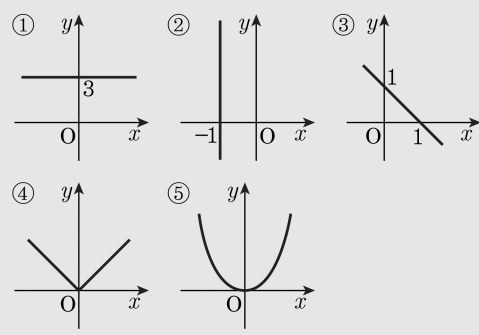
③  $y = -x + 1$

④  $y = |x|$

⑤  $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수  $x_1, x_2$  에 대하여

$x_1 \neq x_2$  이면  $f(x_1) \neq f(x_2)$  을 만족하는 함수를 찾으려 한다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

8. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠  $f(x) = 2x + 1$

㉡  $g(x) = x^2$

㉢  $h(x) = -x$

㉣  $k(x) = |x|$

- ① 4 개      ② 3 개      ③ 2 개      ④ 1 개      ⑤ 없다

해설

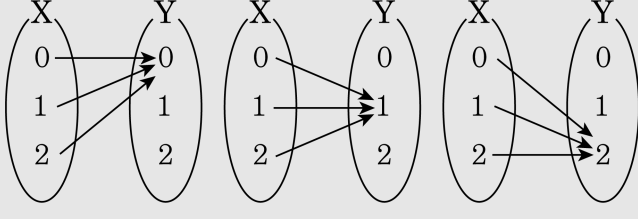
이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.  
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는  
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지  
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.  
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.  
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)  
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,  
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.  
답은 2 개

9. 집합  $A = \{0, 1, 2\}$  에 대하여  $A$  에서  $A$  에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3                      ② 6                      ③ 9                      ④ 12                      ⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



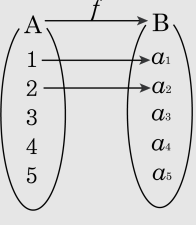
그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.



11. 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 집합  $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  로의 대응  $f$  중  $f(1) = a_1, f(2) = a_2$  인 함수  $f$  의 개수는?
- ① 8 개                      ② 25 개                      ③ 64 개  
④ 81 개                      ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$  인 함수  
 $f : A \rightarrow B$  는 다음 그림에서  $A$  의 원소  
3, 4, 5 에  $B$  의 원소  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  중  
하나를 각각 대응시키면 된다.  
따라서, 구하는 함수의 개수는  $5 \times 5 \times 5 =$   
125 (개)



12. 자연수  $a, k$  에 대하여 집합  $X = \{1, 2, 3, k\}$  에서 집합  $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$  로의 함수  $f(x) = 3x + 1$  이 일대일 대응일 때,  $a + k$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수  $f$  가 일대일 대응이고,  $f(x) = 3x + 1$  에서  $f(1) = 4, f(2) = 7$  이므로

$f(3) = a^4$  또는  $f(3) = a^2 + 3a$  이어야 한다.

만약  $f(3) = a^4$  이면  $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데  $a^4 = 10$  을 만족하는

자연수  $a$  가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$  에서  $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

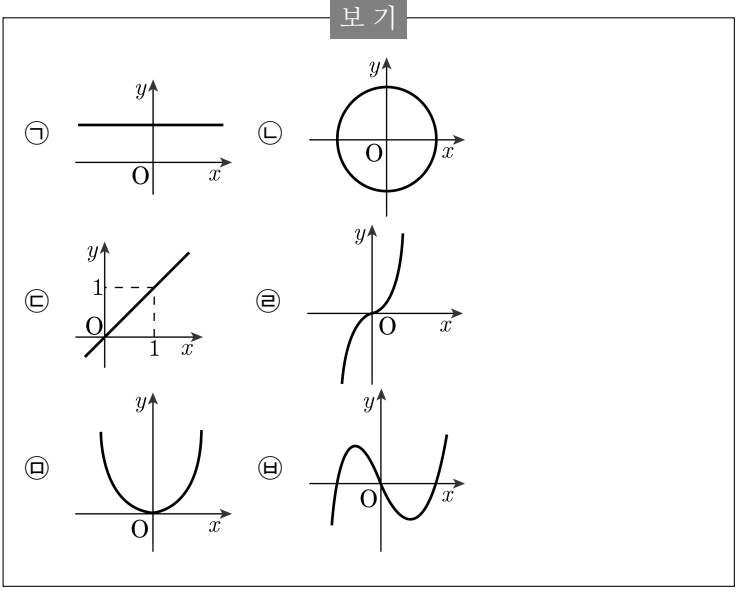
$\therefore a = 2$  ( $\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$ , 즉  $a^4 = 3k + 1$  에서  $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

13. 다음 중 보기의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 상수함수는 ㉠ 과 ㉤ 이다.
- ② 일대일 대응은 ㉢ 과 ㉥ 이다.
- ③ 항등함수는 ㉢ 이다.
- ④ 함수의 그래프가 아닌 것은 ㉡ 뿐이다.
- ⑤ ㉠ 과 ㉢ 의 치역은 같다.

해설

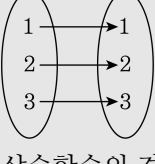
함수의 그래프는  $y$  축에 평행한 직선을 그을 때, 교점이 오직 하나인 그래프이므로 ㉠, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥ 이다.  
일대일 대응인 그래프는 함수의 그래프 중  $x$  축에 평행한 직선을 그을 때 교점이 하나인 그래프이므로 ㉢, ㉥ 이다.  
상수함수는  $X$  의 모든 원소가  $Y$  의 한 원소에만 대응되는 함수이므로 ㉠ 이다.  
항등함수는  $X$  의 모든 원소가 자기 자신에 대응되는 함수이므로 ㉤ 이다. 따라서 옳은 것은 ④ 이다.

14. 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대해  $X$ 에서  $X$ 로의 함수 중 항등함수의 개수를  $a$ , 상수함수의 개수를  $b$ 라 할 때,  $a + b$ 는 얼마인가?

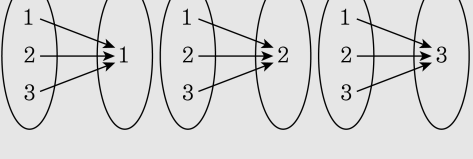
- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

항등함수는  $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$ 의 한 가지가 있고,



상수함수의 경우는  $(1, 2, 3) \rightarrow 1, (1, 2, 3) \rightarrow 2, (1, 2, 3) \rightarrow 3$ 의 3가지가 있다.



$\therefore a + b = 4$

15. 두 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  $x \in A$ 인 모든  $x$ 에 대하여  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수  $f$ 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

집합  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면  
-1이 대응할 수 있는 원소는  
-2, -1, 0, 1, 2의 5가지.  
0이 대응할 수 있는 원소는  
 $f(-0) = -f(0)$ 에서,  $2f(0) = 0$ ,  
즉 0의 1가지  
1이 대응할 수 있는 원소는  $-f(-1)$ 의 1가지  
따라서, 함수  $f$ 의 개수는  $5 \times 1 \times 1 = 5$  (개)

16. 집합  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합  $X, Y$ 가  $X \cup Y = U$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때,  $X$ 에서  $Y$ 로의 일대일 대응이 되는 함수  $f$ 의 개수를 구하면?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 12개

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4\} \text{ 에서 } X, Y \subset U, X \cup Y = U,$$
$$X \cup Y = \emptyset \text{ 이다.}$$

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$
$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, X \cup Y = \emptyset \text{ 이므로}$$
$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$
$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  의 6 가지 경우가 생  
기며

$X$ 에서  $Y$ 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

17.  $f(x) = x^2 - x$  로 나타내어지는 함수  $f : A \rightarrow A$  는  $A = \{x \mid x \geq a\}$  이면 일대일대응이다.  $a$  의 값을 구하면 ?

- ① 4      ② 2      ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$  가 일대일함수이므로

그림에서  $a \geq \frac{1}{2}$  이고 또한 일대일대

응이므로

$A = \{x \mid x \geq a\}$  에서  $f(a) = a$  이어야 한다.

$f(x) = x^2 - x$  에서  $f(a) = a$  이므로

$$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$$

$$\therefore a = 0, 2$$

그런데,  $a \geq \frac{1}{2}$  이므로

$$\therefore a = 2$$

