

1. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$

② $y = \frac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$

④ $\frac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x 에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

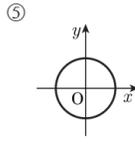
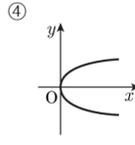
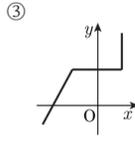
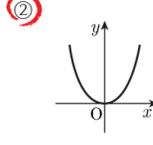
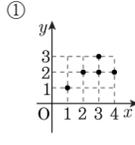
② $y = \frac{1}{x^2}$ 은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm\sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\frac{1}{y} = x$ 는 $y = \frac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

⑤ $xy = 2$ 는 $y = \frac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니다.

2. 다음 그래프 중에서 함수의 그래프는?

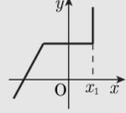


해설

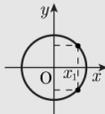
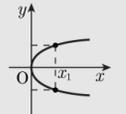
X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응되어야 한다.

① $f(3) = 2, f(3) = 3$ 이므로 함수가 아니다.

③ x_1 에 대응하는 y 의 값이 무수히 많으므로 함수가 아니다.



④, ⑤ x_1 에 대응하는 y 의 값이 2개이므로 함수가 아니다.



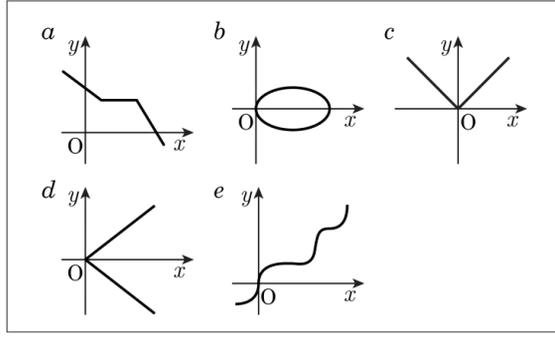
3. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

- ① $\{-1, 1\}$ ② $\{-1, 0, 1\}$ ③ $\{0, 1, 2\}$
④ $\{-1, 0, 2\}$ ⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로
 $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$
따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

4. 다음 그래프 중 함수인 것은?

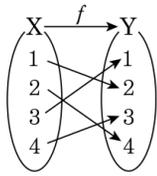


- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e]만이 함수이다.

5. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수이다.
- ② 정의역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ③ 공역은 {1, 2, 3, 4} 이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 4} 이다.
- ⑤ 일대일 대응이다.

해설

- ① 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
- ②, ③ 정의역과 공역은 모두 {1, 2, 3, 4}이다.
- ④ 치역은 {1, 2, 3, 4}이다.
- ⑤ 집합 X 의 각 원소에 대한 함숫값이 모두 다르므로 일대일 대응이다.

6. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$f(a) + f(b) = |a| + |b|$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$

$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$

$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$

7. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.

$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

- ① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$
④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$$\begin{aligned} f(24) &= f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3) \\ f(2^3) &= f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2) \\ &= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2) \\ \text{따라서 } 3f(2) + f(3) &= 3a + b \end{aligned}$$

8. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$
 $\therefore f(0) = 0$

9. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$

$\therefore f(0) + f(2) = 1$

10. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

- ㉠ -3 ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ 0 ㉣ $\frac{1}{3}$ ㉤ 3

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$ 이다.
 $x = 1, y = -1$ 을 대입하면
 $f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 0$
 $f(-1) = -f(1), f(1) = 3$ 이므로
 $\therefore f(-1) = -3$

11. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(1) = 1$
 ② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
 ③ $f(a^2) = 2f(a)$
 ④ $f(a^n) = nf(a)$
 ⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

12. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

$$\begin{aligned} \text{(i)} & f(2x) = f(x) \quad (x = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{(ii)} & f(2x+1) = 2^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$\begin{aligned} 1280 &= 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,} \\ f(2^8 \cdot 5) &= f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5) \\ &= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,} \\ f(2 \cdot 2 + 1) &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

13. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때,
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2008)$ 의 값은?

(가) $f(1) = 1, f(2) = 2$ (나) $f(x+1) = f(x+2) + f(x)$
--

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

(나) 에서 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$ 이므로
 $f(3) = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1$
 $f(4) = f(3) - f(2) = 1 - 2 = -1$
 $f(5) = f(4) - f(3) = -1 - 1 = -2$
 $f(6) = f(5) - f(4) = -2 - (-1) = -1$
 $f(7) = f(6) - f(5) = -1 - (-2) = 1$
 $f(8) = f(7) - f(6) = 1 - (-1) = 2$
 \vdots
 따라서 $f(1) = f(7), f(2) = f(8), f(3) = f(9), \dots,$
 $f(x) = f(x+6)$ 이고
 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 0$ 이므로
 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2008)$
 $= 334 \{ f(1) + f(2) + \dots + f(5) + f(6) \}$
 $+ f(2005) + f(2006) + f(2007) + f(2008)$
 $= 334 \cdot 0 + 1 + 2 + 1 + (-1) = 3$

14. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

15. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

16. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으시면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$

㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$

㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$