1. 좌표평면 위의 점 $(-2,\ 3)$ 을 x 축 방향으로 3 , y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동 시키면 점 $(a,\ b)$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(x, y) \rightarrow (x+3, y-1)$
$\therefore (-2, 3) \rightarrow (1, 2)$

2. 평행이동 $T : (x,\ y) \to (x+3,\ y+2)$ 에 의하여 직선 $y = 5x$ 가 옮겨지는 도형의 방정식을 구하면?

① $y = x - 5$ ② $y = 2x - 3$ ③ $y = 3x - 9$
④ $y = 4x - 7$ ⑤ $y = 5x - 13$

해설
x 대신 $x - 3$, y 대신 $y - 2$ 를 대입하면 되므로
구하는 도형의 방정식은 $y - 2 = 5(x - 3)$
$\therefore y = 5x - 13$

3. 직선 $y=2x+1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 y 절편은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선 $y=2x+1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y+1=2(x-2)+1$,

$y=2x-4$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 -4 이다.

4. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축 방향으로 1 , y 축의 방향으로 −2 만큼 평행 이동한 도형의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 9 ② 7 ③ 5 ④ 3 ⑤ 1

해설

$y = 2x + 3$

$\Rightarrow \quad y + 2 = 2(x - 1) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 1$

$\therefore \quad a + b = 1$

5. 곡선 $y = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동 한 곡선을 구하면?

① $y = -3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$
② $y = -3x^3 + 5x^2 + 4x - 2$
③ $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2$
④ $y = 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$
⑤ $y = -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

해설

y 축 대칭이므로
주어진 식에 x 대신 $-x$를 대입한다.
$y = 3(-x)^3 - 5(-x)^2 - 4(-x) + 2$
$= -3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$

6. 점 $\mathrm{A}(1, -2)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(2, -1)$ ② $(1, 3)$ ③ $(1, 2)$
④ $(1, -1)$ ⑤ $(0, -2)$

해설

$\mathrm{A}(1, -2)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2, 1)$ 이다.
이 점을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축 의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$(0, -2)$ 가 된다.

7. 평행이동 $f:(x,y)\to(x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1,2)$ 가 점 $(-1,4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2,-2)$　② $(2,2)$　③ $(2,0)$
④ $(-2,2)$　⑤ $(4,2)$

해설

$(1+a,2+b)=(-1,4)$
$\Rightarrow\quad a=-2,\quad b=2$
$\therefore\quad (x+2,y+2)=(0,0)$
$\Rightarrow\quad x=2,\quad y=-2$
$\Rightarrow\quad (2,-2)$

8. 직선 $x-2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

9. 원 $(x+4)^2+(y-3)^2=3$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은?

① $(x-4)^2+(y-3)^2=3$
② $(x+4)^2+(y+3)^2=3$
③ $(x+3)^2+(y+4)^2=3$
④ $(x-4)^2+(y+3)^2=3$
⑤ $(x+3)^2+(y-4)^2=3$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

10. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$\Rightarrow \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right) = (a,b)$

$\Rightarrow a+b=5$

11. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
$\therefore a = 2$

12. 점 $(2, 4)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동 점의 좌표를 구하면?

① (1, 3) ② (2, 4) ③ (3, 5)
④ (4, 6) ⑤ (5, 7)

해설
점 (2, 4) 를 다시 x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(2 + 2, 4)$, 즉 (4, 4)
점 $(4, 4)$ 를 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2 \cdot 3 - 4, 4)$, 즉 $(2, 4)$

13. 원 $x^2+y^2-6x+8=0$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=4$
② $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
③ $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2=1$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

해설

원 $x^2+y^2-6x+8=0$은 중심이 $(3,\ 0)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
원의 중심 $(3,\ 0)$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여
대칭이동한 점을 $(a,\ b)$ 라 하면
$\frac{3+a}{2}=2,\ \frac{0+b}{2}=1$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 $(1,\ 2)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$

14. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 과 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭인 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=1$　② $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$　④ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
⑤ $x^2+y^2=1$

해설
$y=-x$ 에 대해 대칭이므로
원의 방정식에 x 대신 $-y$ 를, y 대신 $-x$ 를 대입 한다.
$\Rightarrow$ $(-y-1)^2+(-x+2)^2=1$
$\Rightarrow$ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

15. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

16. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f\ :\ (x,\ y) \to (x - a,\ y - 1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y + 1) = (x + a)^2 - 2(x + a)$
$y = x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
$x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$x_1 + x_2 = -(2a - 4)$
$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a - 4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

17. 직선 $y = x + 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동하면 점 $(3, -2)$ 를 지나는가?

① 1　② 2　③ 3　④ -2　⑤ -1

해설

$y = x + 1$ 을 x축에 대칭 시키면

$y = -x - 1$

y축으로 α 평행이동 : $y - \alpha = -x - 1$

$(3, -2)$ 를 지나므로

$-2 - \alpha = -3 - 1$ 에서 $\alpha = 2$

18. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 을 점 $(2,1)$ 에 대하여 대칭이동 한 원의 방정식은?

① $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$　② $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$

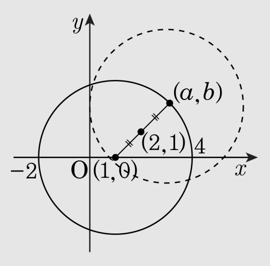
③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$　④ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

⑤ $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-1)^2 + y^2 = 9$



대칭이동한 원의 중심을 (a,b) 라 하면 $\frac{1+a}{2} = 2$, $\frac{0+b}{2} = 1$

$\therefore\ a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

19. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이 직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

20. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 2$ 에 관하여 대칭이동한 식에서 중심의 좌표는?

① $(1, 1)$ ② $(1, 2)$ ③ $(2, 1)$ ④ $(2, 2)$ ⑤ $(2, 3)$

해설

원 중심 $\mathrm{O}(0, 0)$ 을 $y = -x + 2$ 에 대해
대칭이동 하면 된다. 대칭 이동점을
$\mathrm{O}'(a, b)$ 라 하면, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 은
$y = -x + 2$ 에 수직하고, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 의 중점은
$y = -x + 2$ 위에 있다.

$\Rightarrow \ \dfrac{b}{a} = 1 \ \cdots$①,

$\dfrac{b}{2} = -\dfrac{a}{2} + 2 \ \cdots$ ②

①,②를 연립하면, $a = 2,\ b = 2$

$\therefore$ 중심좌표 : $(2,\ 2)$

21. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore\ a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore\ a = 5$

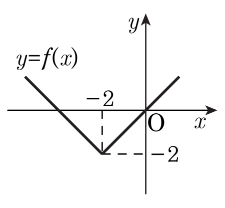
22. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

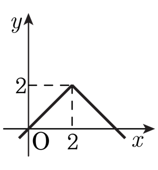
① -18　　② -16　　③ 0　　④ 22　　⑤ 23

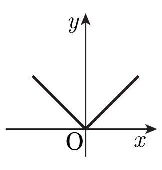
해설

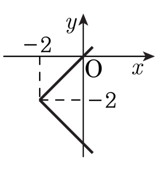
$(x-2)^2+(y-4)^2=20$
즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$
1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$
2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.
$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$
1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$
$a+b+c=22$

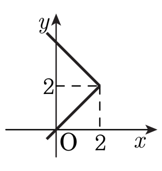
23. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?

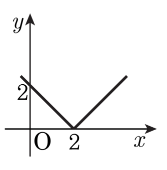


①


②


③


④


⑤


해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

24. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

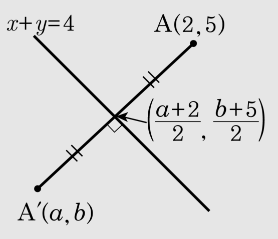
해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$

25. 두 점 $\mathrm{A}(2,5), \mathrm{B}(7,0)$ 과 직선 $x+y=4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $\sqrt{17}, \mathrm{P}(2,-1)$　② $2\sqrt{17}, \mathrm{P}(3,1)$　③ $3\sqrt{17}, \mathrm{P}(5,2)$
④ $4\sqrt{17}, \mathrm{P}(4,8)$　⑤ $5\sqrt{17}, \mathrm{P}(1,2)$

해설



점 $\mathrm{A}(2,5)$ 를 직선 $x+y=4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,b)$ 로 놓으면

선분 AA′ 의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$\frac{a+2}{2}+\frac{b+5}{2}=4$

$\therefore a+b=1 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 직선 AA′ 은 $x+y=4$ 와 수직이므로

$\frac{b-5}{a-2}\cdot(-1)=-1$

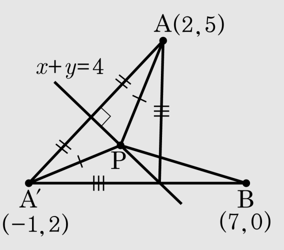
$\therefore a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

$\therefore \mathrm{A}'(-1,2)$

이때, 다음 그림에서



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\ &\geq \overline{\mathrm{A'B}}\\ &= \sqrt{(7+1)^2+(0-2)^2}\\ &= \sqrt{68}=2\sqrt{17}\end{aligned}$$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{17}$ 일 때의 점 P 는 직선 A′B 와 직선 $x+y=4$ 의 교점이다.

두 점 $\mathrm{A}'(-1,2), \mathrm{B}(7,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y-0=\frac{0-2}{7-(-1)}(x-7)$,

$y=-\frac{1}{4}(x-7)$

$\therefore x+4y-7=0$

두 방정식 $x+4y-7=0$, $x+y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$x=3, y=1$

$\therefore \mathrm{P}(3,1)$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(3,1)$