**1.** 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ $(-2 \le x \le 2)$ 의 최댓값을 $M$ , 최솟값을 $m$ 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

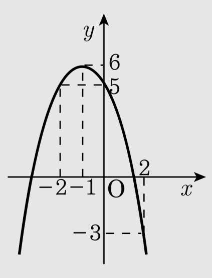
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 - 2x + 5 = -\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 5 = -(x+1)^2 + 6$

점$(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.




$f(-2) = 5, f(2) = -3$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$\therefore\ M + m = 6 - 3 = 3$

**2.** 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4<-2x+7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2개일 때, $a$ 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 0$　　② $-1 < a \leq 0$　　③ $-2 \leq a < -1$

④ $-2 < a \leq -1$　　⑤ $-3 < a \leq -2$

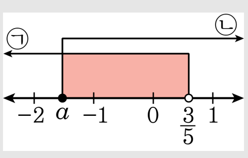
해설

$3x+4<-2x+7$ 에서

$x < \frac{3}{5}$　$\cdots$ ㉠

$x \geq a$　$\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면




$\therefore -2 < a \leq -1$

**3.** 두 직선 $ax+by+c=0$, $cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$ ② $2x+y=5$ ③ $2x-y=3$

④ $x+2y=5$ ⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\cdots$㉠

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}\cdots$㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}=-\frac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}, c=\frac{b^2}{a}$

$\therefore \frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2 \neq 0)$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ : $x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : $-1$

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

**4.** 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 $k$ 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$ ② $k > -5$ ③ $-5 < k < 5$
④ $k < \sqrt{5}$ ⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설
원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$
이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

**5.** 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $kx^2 + 2x + k < 0$이 성립하도록 하는 실수 $k$ 의 값의 범위는? (단, $k \neq 0$ )

① $k < -1$ ② $k < 1$

③ $-1 < k < 0$ ④ $k < -1$ 또는 $k > 0$

⑤ $-1 < k < 1$

해설

모든 실수 $x$에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면 이차함수 $y = kx^2 + 2x + k$ 의 그래프가 $x$ 축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

즉, 이차함수 $y = kx^2 + 2x + k$ 의 그래프가 위로 볼록하고 이차방정식 $kx^2 + 2x + k = 0$ 이 허근을 가져야 하므로

$k < 0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4} = 1^2 - k \cdot k < 0$

$k^2 - 1 > 0$

$(k+1)(k-1) > 0$

$\therefore k < -1$ 또는 $k > 1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 부분을 구하면 $k < -1$

**6.** $x$에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 $x$의 값의 존재하지 않도록 상수 $a$의 값의 범위는?

① $-3<a<12$ ② $-3<a<8$ ③ $-3<a<4$
④ $-2<a<12$ ⑤ $-2<a<3$

**해설**

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{또는} x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2-a}_{(다)} \underbrace{\phantom{a^2-a} < 12}_{(라)}$$

(다)에서

$a^2-a+2>0$, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

∴모든 실수
(라)에서
$a^2-a-12<0$, $(a+3)(a-4)<0$
$\therefore -3<a<4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3<a<4$

**7.** 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： m

▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 $a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

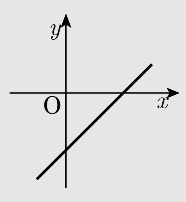
$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

**8.** 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 　　　　　　　　　사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설




$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

$ab<0$ , $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$ , $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)$>0$ , ($y$ 절편)$<0$

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

**9.** 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 $k$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ $k$ 는 양수)

**10.** $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　　② 4　　③ 9　　④ 16　　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c \rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

**11.** $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값은?

① 1　② $1-i$　③ $1+i$　④ -1　⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i$이므로

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$

**12.** $x$ 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 $y$ 의 최솟값을 구하여라.

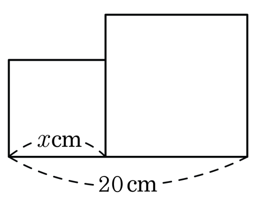
▶ 답 :

▷ 정답 : $-5$

해설

준식을 $x$ 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 $x$ 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
$x$ 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\ge 0$
$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\le 0$
$\rightarrow\ y^2+4y-5\le 0$
$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\le 0$
$\therefore\ -5\le y\le 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 $-5$

**13.** 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.




▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 $x$ , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$ ,
넓이를 $y$ 라고 하면

$$y = x^2 + (20 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$
$$= 2(x - 10)^2 + 200$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

**14.** 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① $-5$ ② $-6$ ③ $-7$ ④ $-8$ ⑤ $-9$

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i ) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii ) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

**15.** 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.