

1. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \leq x \leq 2$) 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$y = -x^2 - 2x + 5 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$$

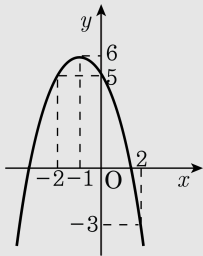
점 $(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.

$$f(-2) = 5, f(2) = -3$$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$$\therefore M + m = 6 - 3 = 3$$



2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x + 4 < -2x + 7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2개일 때, a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 0$

② $-1 < a \leq 0$

③ $-2 \leq a < -1$

④ $-2 < a \leq -1$

⑤ $-3 < a \leq -2$

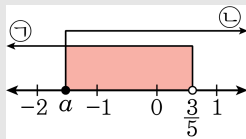
해설

$3x + 4 < -2x + 7$ 에서

$$x < \frac{3}{5} \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$x \geq a \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

①, ②의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면



$$\therefore -2 < a \leq -1$$

3. 두 직선 $ax + by + c = 0$, $cx + ay + b = 0$ 이 일치할 때, 이 직선과
평행하며, 점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은?

① $x - y = 1$

② $2x + y = 5$

③ $2x - y = 3$

④ $x + 2y = 5$

⑤ $x + y = 3$

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$cx + ay + b = 0 \Rightarrow$$

$$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{이 일치하므로 } -\frac{a}{b} = -\frac{c}{a}, -\frac{c}{b} = -\frac{b}{a}$$

$$a^2 = bc, b^2 = ac$$

$$\therefore c = \frac{a^2}{b}, c = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore a^3 = b^3 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

$$\therefore a = b (\because a^2 + ab + b^2 \neq 0)$$

$$\therefore c = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore \textcircled{㉠} : x + y + 1 = 0, y = -x - 1$$

$$\therefore \text{구하는 직선의 기울기} : -1$$

$$\therefore \text{구하는 직선} : y - 1 = (-1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

4. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$

② $k > -5$

③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$

⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k+5$$

이 때, $k+5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

5. 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $kx^2 + 2x + k < 0$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k \neq 0$)

① $k < -1$

② $k < 1$

③ $-1 < k < 0$

④ $k < -1$ 또는 $k > 0$

⑤ $-1 < k < 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면 이차함수 $y = kx^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

즉, 이차함수 $y = kx^2 + 2x + k$ 의 그래프가 위로 볼록하고 이차방정식 $kx^2 + 2x + k = 0$ 이 허근을 가져야 하므로

$$k < 0 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{D}{4} = 1^2 - k \cdot k < 0$$

$$k^2 - 1 > 0$$

$$(k+1)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 1 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 부분을 구하면 $k < -1$

6. x 에 대한 이차부등식 $x^2 - 10x - 24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 존재하지 않도록 상수 a 의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$

② $-3 < a < 8$

③ $-3 < a < 4$

④ $-2 < a < 12$

⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\frac{-2 < a^2 - a < 12}{\text{(다)} \quad \quad \quad \text{(라)}}$$

(다)에서

$$a^2 - a + 2 > 0, \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

$\therefore$ 모든 실수

(라)에서

$$a^2 - a - 12 < 0, (a+3)(a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 4$$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$$-3 < a < 4$$

7. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 30

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

8. 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 $ab < 0, bc > 0$ 일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.



답 :

사분면



정답 : 제 2사분면

해설

$ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

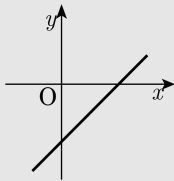
주어진 조건에서

$ab < 0, bc > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$\therefore$ (기울기) > 0 , (y 절편) < 0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로
지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.



9. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로, } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

10. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1

② 4

③ 9

④ 16

⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

11. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

12. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$$

$$\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$$

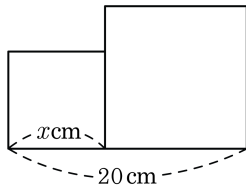
$$\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$$

$$\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq y \leq 1$$

$\therefore y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

13. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,

넓이를 y 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (20 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= 2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

14. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$ 일 때 $f(-2)$ 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) + 3$$

$$\therefore f(-2) = -9$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라 하면}$$

$$\text{i) } f(-1) = 3 \text{에서 } a - b + c - 1 = 3$$

$$\text{ii) } f(1) = 3 \text{에서 } a + b + c + 1 = 3$$

$$\text{iii) } f(2) = 3 \text{에서 } 4a + 2b + c + 8 = 3$$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -2, b = -1, c = 5$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$$

$$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$$

15. 다항식 $f(x)$ 는 다항식 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $Q(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는?

- ① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$
- ② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$
- ③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$
- ④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$
- ⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) \cdots \textcircled{㉠}$$

$$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots \textcircled{㉡}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$$

$r(x)$ 가 $g(x)$ 보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$ 는 $\{g(x)\}^2$ 보다 낮은 차수이다.

따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$ 이고 몫은 $h(x)$ 이다.