1. 두 원 $(x-2)^2+y^2=10$, $x^2+y^2+y-5=0$ 의 공통현을 포함하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

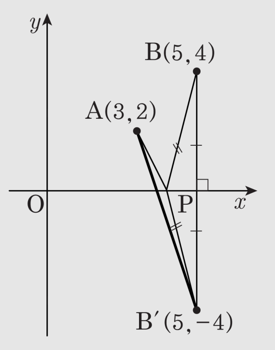
$(x-2)^2+y^2=10$ 에서
$x^2+y^2-4x-6=0$ 이므로
두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$
$4x+y+1=0, y=-4x-1$
$\therefore a=-4, b=-1$
$\therefore a+b=-4+(-1)=-5$

2. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면
$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$
따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고
$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



3. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 $\mathrm{M}(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

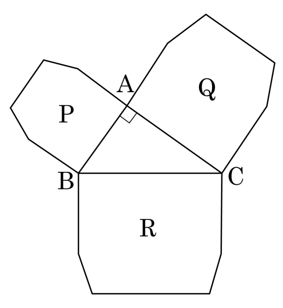
4. 직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 직선 $2x+3y+2=0$ 이 된다. 이때, 상수 k 의 값은?

① -3　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

직선 $2x+3y+7=0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면,
$2(x+2)+3(y-k)+7=0$
$\therefore\ 2x+3y+11-3k=0$
이 직선이 $2x+3y+2=0$ 과 일치하므로
$11-3k=2 \quad \therefore\ k=3$

5. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$　　② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$　　④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R 가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ 이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

6. 세 점 $A(2,1), B(-4,3), C(-1,-3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a,b)라고 할때, $a+b$를 구하면?

① -2　② 3　③ 4　④ -1　⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$이다.
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2+(b-3)^3}$에서 $3a-b=-5 \cdots$ ㉠
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+3)^3}$에서 $6a+8b=-5 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면
$a=-\frac{3}{2}$ $b=\frac{1}{2}$
$\therefore\ a+b=-1$

7. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{\text{AB}} = 13$, $\overline{\text{AC}} = 5$
따라서 $\overline{\text{AB}} : \overline{\text{AC}} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점$(1,\ 0)$ 을 지나는 원의
방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2+y^2-8x-y-4=0$

② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$

④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$

⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을
지나는 임의의 원
또는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다.
위 방정식이 나타내는 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$x=1$, $y=0$ 을 대입하면
$-3m+3=0$
$\therefore m=1$
$(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
$2x^2+2y^2-10x-2y+8=0$,
$x^2+y^2-5x-y+4=0$

9. 원 $x^2+y^2-2x-1=0$ 와 같은 중심을 가지고 $x+y+1=0$ 에 접하는 원의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ 2π　④ 3π　⑤ 4π

해설

$x^2+y^2-2x-1=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=2$

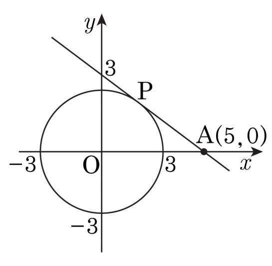
따라서 구하는 원의 중심 : $(1,\ 0)$

반지름은 중심에서 $x+y+1=0$ 까지의 거리이므로

$\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 넓이 : 2π

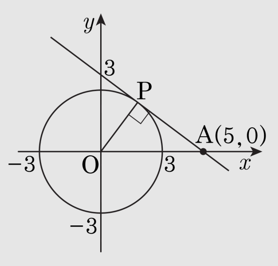
10. 점 A(5, 0) 에서 원 $x^2+y^2=9$ 에 그은 한 접선의 접점을 P 라 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 2　② 3　③ 4
④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

그림에서 $\overline{OP}=3$
$\overline{OA}=5$ 이고
$\overline{OP}\perp\overline{AP}$ 이므로
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$
$=\sqrt{16}=4$



11. 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 위의 점 C에서 두 점 $\mathrm{A}(6,\ -4)$, $\mathrm{B}(10,\ 0)$을 지나는 직선 l에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5+4\sqrt{2}$　　② $5+\frac{9}{2}\sqrt{2}$　　③ $10+\sqrt{2}$

④ 11　　⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

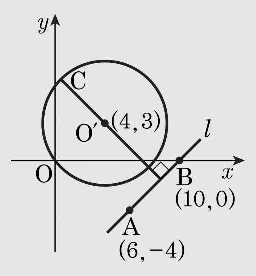
기울기가 $m=\frac{-4-0}{6-10}=1$이므로

$y=x-10$　즉, $x-y-10=0$ 이고

원의 중심 $(4,\ 3)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$이므로 원 위의 점 C에서

직선 l에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2}+5$이다.



12. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $5\sqrt{2}-5$　　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

13. 원점을 지나고, 점 (2, 1) 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$ ② $y=-\frac{2}{3}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=-\frac{4}{3}x$ ⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y=kx(k\neq 0)$ 이라 하면,

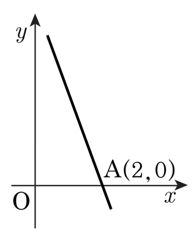
(2, 1) 에서의 거리가 1 이므로

$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, $|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$, $k(3k-4)=0$

$k=\frac{4}{3}$ ($\because k\neq 0$)

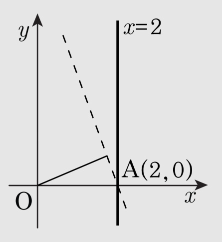
$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$

14. 점 $A(2, 0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{5}$　　⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2, 0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x = 2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

15. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $(x-4)^2+(y-4)^2=1$
③ $(x+4)^2+(y-4)^2=1$
④ $(x+4)^2+(y+4)^2=1$
⑤ $(x-4)^2+(y+4)^2=1$

해설

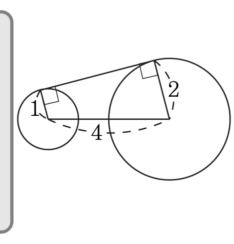
$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$라 하면
$A(7,7), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+7}{2},\ \ y=\frac{b+7}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-7,\ b=2y-7$
이 때, 점 P는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$
위의 점이므로 $(a-1)^2+(b-1)^2=4$ 가 성립한다.
$(2x-8)^2+(2y-8)^2=4$
$\therefore (x-4)^2+(y-4)^2=1$

16. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



17. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 다른 한 원은
서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$ 이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 가
직선 $y=ax+b \cdots$ ① 에 대하여
대칭이므로 직선 ①은 점 $(-2,1)$ 과 점 $(0,0)$ 을 잇는 선분을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ① 위에 있고
기울기의 곱은 -1 이다.
$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$
$\therefore\ a=2,\ b=\frac{5}{2}$
따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$